This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 3029.01

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE BEQUEST OF

FRANCIS B. HAYES

(Class of 1839)

This fund is $10,000 and its income is to be used
"For the purchase of books for the Library"
Mr. Hayes died in 1884

1 April 1902.

Lehr- und Übungsbuch

der

Differential-Rechnung

(enthaltend über 750 Übungsaufgaben)

für mittlere technische Lehranstalten, Realgymnasien, Oberrealschulen u. s. w., sowie zum Selbststudium

von

Dr. Heinrich Grünbaum,
Lehrer der Mathematik am Rhein. Technikum zu Bingen.

Würzburg.
Verlag von J. Kaul's Buchhandlung
1901.

Math 3127.01

Hayes fund.

Alle Rechte vorbehalten.

Inhalts-Verzeichnis.

		Seite
§ 1.	Constante und Veränderliche	1
§ 2.	Function	2
§ 3.	Arithmetische Darstellung der Functionen durch Tabellen und Gleichungen	3
§ 4.	Geometrische Darstellung der Functionen	6
§ 5.	Die Potenzfunction	8
§ 6.	Die Exponentialfunction und die logarithmische Function	12
§ 7.	Die trigonometrischen Functionen	14
§ 8.	Fortsetzung: Geometrische Darstellung	19
§ 9.	Die Arcusfunctionen	22
§ 10.	Grenze	24
§ 11.	Zwei wichtige Grenzwerte	28
§ 12.	Der Differenzenquotient	33
§ 13.	Der Differentialquotient	36
§ 14.	Das Differenziren	41
§ 15.	Die Potenzfunction	42
§ 16.	Die Constante	48
§ 17.	Die algebraische Summe	53
§ 18.	Das Product	56
§ 19.	Der Quotient	58
§ 20.	Mittelbare Functionen	61
§ 21.	Übungsaufgaben zu § 20	65
§ 22.	Übungsaufgaben zu §§ 15—20	74
§ 23.	Der Differentialquotient als Richtungsconstante	75
§ 24.	Das Steigen und Fallen der Curven	79
§ 25.	Mehrfaches Differenziren	81
§ 26.	Maxima und Minima	84
§ 27.	Aufgaben über Maxima und Minima	88
§ 28.	Die logarithmische Function	91

§ 29. Die Exponentialfunction 98
§ 30. Die Functionen Sinus und Cosinus . . . 101
§ 31. Die Functionen Tangens und Cotangens . . 107
§ 32. Die Arcusfunctionen 110
§ 33. Vermischte Übungsaufgaben 113
§ 34. Aufgaben aus der Geometrie 116
§ 35. Die 4 Tangentenstücke 118
§ 36. Weitere Aufgaben über Maxima und Minima . 122
§ 37. Der erste und zweite D. Q. in der Mechanik . 125
§ 38. Reihenentwicklung 127
§ 39. Anwendungen 131
§ 40. Fortsetzung 135

Vorwort.

An Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung für Studierende an Hochschulen ist gegenwärtig wahrlich kein Mangel. Noch immer aber fehlt es an einem gänzlich elementar gehaltenen Buch für Studierende an technischen Mittelschulen, welches eine genügend große Anzahl nicht allzu schwieriger Übungsaufgaben enthielte. Diesem Mangel möchte das vorliegende Buch abhelfen; es ist zugleich Lehrbuch und Aufgabensammlung und soll den Studierenden in die höhere Analysis einführen, insbesondere denselben befähigen, den in der Mechanik, der Festigkeitslehre, dem Maschinenbau, der Elektrotechnik u. s. w. notwendig werdenden mathematischen Entwicklungen ohne Mühe zu folgen. An Vorkenntnissen verlangt das Buch: die niedere Algebra und Geometrie, sowie den Coordinatenbegriff. In der zweiten Hälfte werden auch noch die Gleichungen der geraden Linie und der Kegelschnitte als bekannt vorausgesetzt.

Der behandelte Lehrstoff beschränkt sich auf die Differentiation der expliciten Functionen einer Variablen und deren einfache Anwendungen auf elementare und analytische Geometrie, auf die Lehre von den Maxima und Minima, auf die Reihenentwicklung und einige Begriffe der Mechanik.

Bei der Abfassung dieses Buches, das aus dem Bedürfnis des Unterrichts hervorgegangen ist, wurde überall eine klare, leicht verständliche Darstellung der Begriffe und Ableitungen angestrebt. Die entwickelten Formeln und Sätze sind stets durch ausführlich gelöste Aufgaben und Beispiele erläutert, denen dann immer eine große Zahl vom Leser selbständig zu lösender Übungsaufgaben folgt. Die Resultate sind stets beigefügt, um den Leser davor zu bewahren, sich mit einem falschen Resultat zufrieden zu geben.

Beim Entstehen dieser Arbeit wurden mir zahlreiche Anregungen von meinem Kollegen, Herrn Dr. H. Wallbott zuteil, wofür ich demselben meinen besten Dank ausspreche.

Bingen, den 15. Mai 1901.

H. Grünbaum.

§ 1. Constante und Veränderliche.

Die Begriffe, die den Übergang von der niederen zur höheren Mathematik vermitteln, sind der Hauptsache nach der Begriff der „veränderlichen Größe", der „Function" und der „Grenze". Mit ihnen werden wir uns in den §§ 1—10 beschäftigen.

I. Eine Größe, die stets einen und denselben Wert besitzt, heißt eine „unveränderliche Größe" oder eine „Constante".

Z. B. $1, 4, -1, \frac{3}{4}, +\sqrt[3]{5}, \pi = 3{,}14159\ldots$. Constante Größen sind ebenso: das Geburtsjahr eines Menschen, das Alter eines Verstorbenen, der Nominalwert eines Wertpapiers u. s. w.

II. Eine Größe, welche verschiedene Werte (im Allgemeinen unendlich viele) annehmen kann, heißt eine „veränderliche Größe" oder „Variable".

Z. B. Wenn man sagt: g möge eine ganze Zahl bedeuten, dann ist dadurch für g kein bestimmter Wert festgesetzt, sondern g kann unendlich viele Werte besitzen, z. B.: 1, 2, 3, 4, 5 . . . . oder $-1, -2, -3, -4, \ldots$. g heißt in diesem Fall eine veränderliche Größe.

Definiert man x als einen positiven, echten Bruch mit dem Nenner 20, dann giebt es für x nicht blos einen, sondern viele Werte.

$x = \frac{1}{20}, \frac{2}{20}, \frac{3}{20}, \frac{4}{20}, \ldots . \frac{19}{20}$, x ist wiederum eine Variable.

Ebenso ist der „Kreisumfang" eine veränderliche Größe, denn er nimmt (bei verschiedenen Kreisen) verschiedene Werte an.

Variable sind ferner: Das Alter eines Lebenden, die Höhe des Barometerstandes, die Temperatur eines Körpers, der Kurswert eines Wertpapiers u. s. w.

III. Constante pflegt man mit den *ersten* Buchstaben des Alphabets (a, b, c, α, β, γ) zu bezeichnen, Variable mit den letzten (x, y, z, ξ, η, ζ).

§ 2. Function.

I. Sind zwei veränderliche Größen x und y gegeben, und ist jedem Wert von x ein Wert von y in genau bestimmter Weise zugeordnet, dann nennt man y *eine Function von* x.

Sei z. B. x eine ganze positive Zahl und y stets das Quadrat von x, dann sind den Werten

$x = 1 \quad x = 2 \quad x = 3 \quad x = 4 \ldots$ die Werte
$y = 1 \quad y = 4 \quad y = 9 \quad y = 16 \ldots$ zugeordnet.

Überhaupt entspricht dann jedem Wert von x ein genau bestimmter Wert von y. Hier ist also y eine Function von x.

Es bedeute x die ganzen Stunden von Morgens 6 bis Abends 5 Uhr eines Tages im Juli, y sei die dabei stattgehabte Temperatur (in Réaumuregraden). Dann entsprechen den Werten von x

$x = 6, \ 7, \ 8, \ 9 \ldots 3, \ 4, \ 5$ die Werte
$y = 13^0, 14^0, 15^0, 17^0 \ldots 23^0, 22^0, 20^0.$

y ist also eine Function von x.

II. Weitere Beispiele von Functionen: Ein bewegter Körper hat in jedem Augenblick seiner Bewegung einen bestimmten Weg zurückgelegt; also ist

der Weg eine Function der Zeit. — Ein Stab von unveränderlichem Gewicht hat für jeden Wert seiner Temperatur eine bestimmte Länge; also ist seine Länge eine Function seiner Temperatur. — Der Kreisinhalt hat für jeden Wert des Radius r eine bestimmte Größe; also ist der Kreisinhalt eine Function des Radius r.

§ 3. Arithmetische Darstellung der Functionen durch Tabellen und Gleichungen.

I. Um die entsprechenden Werte zweier Veränderlichen x und y einander zuzuordnen, bedient man sich am einfachsten der Tabellenform. Dies geschieht besonders bei Functionen, die in der Physik, Chemie und Technik vorkommen.

Bezeichnet man beispielsweise den Druck, welchen eine allseitig eingeschlossene Dampfmenge ausübt (in Atmosphären ausgedrückt), durch x, die hierbei notwendige Temperatur (in Celsiusgraden) durch y, dann ist y eine Function von x, weil zu jedem Wert von x ein bestimmter Wert von y gehört. Den näheren Zusammenhang zwischen x und y kann man in einer Tabelle ausdrücken:

x (Atm.)	y (° C.)
$x = 1$	$y = 100$
$x = 2$	$y = 121$
$x = 3$	$y = 145$
⋮	⋮
$x = 16$	$y = 203$
$x = 25$	$y = 226$

x (Atm.)	y (° C.)
$x = 50$	$y = 265$
$x = 100$	$y = 311$
$x = 200$	$y = 363$
$x = 400$	$y = 423$
⋮	⋮

Auch die mathematischen Tabellen, wie Quadrat- und Kubikzahltabellen, Sinus- und logarithmische Tafeln sind solche Functionstabellen.

II. Eine zweite Art, vermittelst welcher man y als eine Function von x darstellen kann, besteht darin, daß man mit x irgend welche Rechenoperation vornimmt und deren Resultat gleich y setzt.

Z. B. Unter x wollen wir eine ganze positive Zahl verstehen; erheben wir nun x ins Quadrat und addieren hierzu die Zahl 3, dann erhalten wir eine neue Zahl, die wir y nennen wollen. Wir erhalten dann folgende Zuordnung:

Aus	$x = 1$	wird	gebildet	$1^2 + 3 = 4$	also	$y = 4$
„	$x = 2$	„	„	$2^2 + 3 = 7$	„	$y = 7$
„	$x = 3$	„	„	$3^2 + 3 = 12$	„	$y = 12$
„	$x = 4$	„	„	$4^2 + 3 = 19$	„	$y = 19$
	⋮			⋮		⋮

Es ist also in der That jedem Wert von x ein ganz bestimmter Wert von y zugeordnet. y ist also eine Function von x. Die Art und Weise, wie y aus x gebildet ist, kann man durch eine Gleichung ausdrücken: y ist gleich dem um die Zahl 3 vermehrten Quadrat von x, also

$$y = x^2 + 3.$$

Ebenso wird durch irgend eine andere Gleichung zwischen x und y, etwa durch

$$y = \frac{1}{x - 1}$$

eine Function von x dargestellt. Setze ich hier nacheinander für x die Werte 0,1; 0,2; 0,3; 4; 10; 101 ...., dann erhalte ich, wenn ich die durch die Gleichung angedeutete Rechenoperation ausführe, für y die Werte

$$y = \frac{1}{0{,}1 - 1} = -1{,}111..$$
$$y = \frac{1}{0{,}2 - 1} = -1{,}25$$
$$y = \frac{1}{0{,}3 - 1} = -1{,}4285...$$
$$y = \frac{1}{4 - 1} = 0{,}3333$$

$$y = \frac{1}{10 - 1} = 0{,}1111..$$
$$y = \frac{1}{101 - 1} = 0{,}01$$

Wiederum entspricht also jedem Wert von x ein Wert von y.

III. In ganz gleicher Weise werden durch die Gleichungen:

$$y = \sin x \quad y = \log x \quad y = (1 + x)\cos x$$

Functionen von x dargestellt. Wir können also zusammenfassend sagen: Irgend eine Gleichung, in welcher y durch x ausgedrückt ist, stellt y als Function von x dar. Um ganz allgemein auszudrücken, daß y als Function von x gegeben ist, bedient man sich der folgenden Schreibweise:

$y = f(x)$ (y = f-Function von x)
$y = \varphi(x)$ (y = φ-Function von x)
$y = F(x)$ (y = Groß F-Function von x)
u. s. w.

Alle diese Ausdrücke f (x), φ (x), F (x)..... sollen andeuten, daß mit x eine bestimmte Rechenoperation vorgenommen wurde, deren Resultat y ist.

IV. In der Gleichung $y = f(x)$ werden also der Variablen x *willkürliche* Werte beigelegt und daraus die zugehörigen Werte von y berechnet. Man nennt deshalb x die „willkürliche" oder „*unabhängige Variable*", y die „*abhängige Variable*".

Man kann aber jede Gleichung $y = f(x)$ auch nach x auflösen, d. h. also x als Function von y darstellen.

Z. B. Ist $y = x^2$, dann ist $x = \pm\sqrt{y}$
$y = \log_{(a)} x$ „ „ $x = a^y$
$y = \frac{1}{x-3}$ „ „ $x = \frac{1+3y}{y}$

dann ist x zur abhängigen, y zur unabhängigen Veränderlichen geworden. Hierin liegt zugleich der Satz: Ist y eine Function von x, dann ist im Allgemeinen auch x eine Function von y. Hat man eine Function $y = f(x)$, und löst man diese Gleichung nach x auf, dann erhält man irgend eine Gleichung $x = \varphi(y)$, welche die „umgekehrte" oder „inverse Function" von $y = f(x)$ heißt. Es ist also:

$x = \pm\sqrt{y}$ die inverse Function von $y = x^2$
$x = a^y$ „ „ „ „ $y = \log_{(a)} x$
$x = \frac{1+3y}{y}$ „ „ „ „ $y = \frac{1}{x-3}$
und umgekehrt.

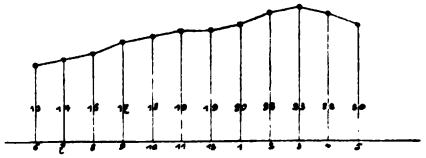
V. Ist y durch eine Gleichung als Function von x gegeben, dann kann man das Functionsverhältnis natürlich auch durch eine Tabelle darstellen, indem man für x beliebige Werte annimmt und die zugehörigen Werte von y berechnet. Aus einer Tabelle läßt sich aber nicht in allen Fällen eine Gleichung reconstruieren.

§ 4. Geometrische Darstellung der Functionen.

I. Um eine Function, die in Tabellenform gegeben ist, anschaulich darzustellen, bedient man sich häufig der sogenannten graphischen Darstellung.

Will man beispielsweise den im § 2 genannten Verlauf der Temperatur eines Julitages zu anschaulichem Ausdruck bringen, so trägt man die Stundenzahl auf einer beliebigen Geraden ab, indem man eine bestimmte Strecke als Einheit wählt, errichtet in den Endpunkten Senkrechte und trägt auf diesen die Temperaturziffer ab (wieder unter Zugrundelegung einer bestimmten Einheit). Die Endpunkte aller Lote zeigen dann den Verlauf der Temperatur. (Vgl. Fig. 1.)

Fig. 1



II. Will man eine durch eine Gleichung $y = f(x)$ gegebene Function anschaulich darstellen, dann bedient man sich am besten der in der analytischen Geometrie gebräuchlichen Coordinatensysteme. Man sieht dann leicht, daß jeder Function $y = f(x)$ eine Curve entspricht. Im Nachfolgenden sollen nun einige der einfachsten und zugleich wichtigsten Functionen untersucht und ihre Curven gezeichnet werden.

III. Die für die Elementarmathematik wichtigsten Functionen (die nun zur Besprechung gelangen) sind:

$y = x^n$	$y = a^x$	$y = \log x$
$y = \sin x$		$y = \arcsin x$
$y = \cos x$		$y = \arccos x$
$y = tg\ x$		$y = arctg\ x$
$y = \cot x$		$y = arcotg\ x$

§ 5. Die Potenzfunction.

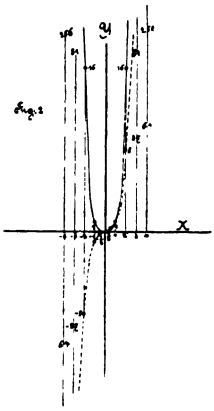
Aus der Veränderlichen x kann man eine Veränderliche y ableiten, wenn man x in die n-te Potenz erhebt und das Resultat gleich y setzt. Die so gebildete Function kann durch die Gleichung $y = x^n$ dargestellt werden und führt den Namen „Potenzfunction". Um uns ein anschauliches Bild dieser Funktion zu verschaffen, nehmen wir für x eine große Anzahl von Werten beliebig an und suchen die zugehörigen Werte von y, die wir dann in ein rechtwinkliges Axensystem eintragen. Dabei müssen wir bezüglich n mehrere Fälle unterscheiden:

Erster Fall: n sei eine ganze positive und gerade Zahl. Z. B. $y = x^4$. Wir machen uns nun eine Tabelle, indem wir für x willkürliche Werte annehmen und die zugehörigen Werte von y daneben schreiben.

$y = x^4$

x	y
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$
1	1
2	16
3	81
4	256
⋮	⋮
⋮	⋮
∞	∞
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$
−1	1
−2	16
−3	81
−4	256
⋮	⋮
−∞	+∞

Um die Curve, die der Function $y = x^4$ entspricht, genau zu verzeichnen, müssen wir für x alle möglichen Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen. Es genügt jedoch, wenn man sich ein ungefähres Bild der Curve machen kann; und hierzu genügt schon eine geringe Anzahl von Werten. Nun tragen wir jedes Paar zusammengehöriger Werte von x und y in das



Coordinatensystem der Figur 2 ein und verbinden die Punkte durch einen Curvenzug. Die so entstehende Curve ist dann ein ziemlich treues Bild der Function $y = x^4$. (Die entstehende Curve ist eine durch den 0-Punkt gehende, parabelähnliche Curve, die die y-Axe zur Symmetrielinie hat. Sie verläuft in zwei Armen ins Unendliche. Ganz ähnliche Curven gehören zu den Functionen $y = x^2$, x^6, x^8 — — —.).

Zweiter Fall: n sei eine ganze positive aber ungerade Zahl.

Z. B. $y = x^3$

x	y
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8
3	27
4	64
⋮	⋮
$+\infty$	$+\infty$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
— 1	— 1
— 2	— 8
— 3	—27
⋮	⋮
$-\infty$	$-\infty$

Hier erhält man eine durch den 0-Punkt gehende Curve, die in diesem Punkt eine Wendung (Übergang vom Convexen ins Concave) macht und daher Wendeparabel heißt. Ähnliche Curven werden auch durch die Gleichungen $y = x^5$, x^7 u. s. w. dargestellt. Nur $y = x^1 = x$ stellt eine unter 45° zur x-Axe geneigte Gerade dar.

Dritter Fall: n sei eine ganze negative und gerade Zahl.

Z. B. $n = -2$ also $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

(Im Nachfolgenden bezeichnen wir mit $+0$ eine sehr kleine positive, mit -0 eine sehr kleine negative Größe.)

$$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

x	y
0	∞
$\frac{1}{5}$	25
$\frac{2}{5}$	$6\frac{1}{4}$
$\frac{3}{5}$	$2\frac{7}{9}$
1	1
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$
∞	0
−0	∞
$-\frac{1}{5}$	25
$-\frac{2}{5}$	$6\frac{1}{4}$

Die der Function $y = x^{-2}$ entsprechende Curve besteht, wie man aus Fig. 3 ersieht, aus zwei getrennten Zweigen, die hinsichtlich der y-Axe zu einander symmetrisch sind; jeder der beiden Zweige geht in zwei Armen ins Unendliche und kommt dabei den beiden Axen immer näher und näher. Die Axen heißen deßhalb Asymptoten der Curve. Ganz ähnliche Curven entsprechen den Functionen x^{-4}, x^{-6} u. s. w.

Vierter Fall: n sei eine ganze negative aber ungerade Zahl.

Z. B. $y = x^{-1}$ oder

$$y = \frac{1}{x}$$

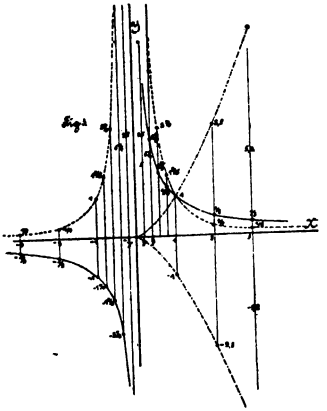
x	y
0	∞
$\frac{1}{5}$	5
$\frac{2}{5}$	$2\frac{1}{2}$
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
∞	0
−0	−∞
$-\frac{1}{5}$	−5
$-\frac{2}{5}$	$-2\frac{1}{2}$

Auch diese Curve besteht, wie man aus Fig. 3 ersieht, aus 2 getrennten Zweigen, von denen jeder sich in 2 Armen in's Unendliche erstreckt. Dabei ist wieder die x- und y-Axe Asymptote. Jedoch ist keine der beiden Axen Symmetrielinie. Ähnliche Curven sind wieder $y = x^{-3}$, x^{-5} u. s. w.

Fünfter Fall: n ist eine gebrochene Zahl

z.B. $y = x^{\frac{3}{2}} = \pm\sqrt{x^3}$ Für negative Werte von x existieren keine reellen Werte von y. Für jeden positiven Wert von x dagegen, giebt es je zwei, nur durch das Vorzeichen verschiedene Werte von y. Vergl. Fig. 3.

x	y
0	± 0
1	± 1
2	± 2,8284
3	± 5,2963
4	8
5	± 11,1805
⋮	⋮
$+\infty$	$\pm\infty$



Aus den bisher behandelten Potenzfunctionen lassen sich durch Zusammensetzung eine unbegrenzte Anzahl weiterer Functionen bilden, die sich in der gleichen Weise geometrisch durch Curven veranschaulichen lassen.

Übungsaufgaben.

Es sollen die nachfolgenden Functionen durch Curven veranschaulicht werden.

1) $y = 4$ (Parallele zur x-Axe im Abstand $+4$)
2) $y = x^2 - 1$ (Parabel; die Hauptaxe fällt mit der y-Axe zusammen; Scheitel hat vom 0-Punkt die Entfernung -1)
3) $y = 2x + 5$ (Gerade)
4. $y = 1 + x^2 + x^3$
5. $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$ (Kreis mit Radius 3; Mittelpunkt im 0-Punkt.)

6. $y = \pm \frac{1}{3}\sqrt{9 - x^2}$ (Ellipse, Mittelpunkt im 0-Punkt. Große Axe = 6. Kleine Axe = 3)

7. $y = x + \sqrt{x}$

8. $y = \frac{1}{x-3}$ (Hyperbel)

9. $y = -x^5$

10. $y = \frac{1}{20} x^6$

11. $y = \frac{1}{x^2 - 9}$

12. $y = \pm\sqrt{(x-1)(x-4)}$

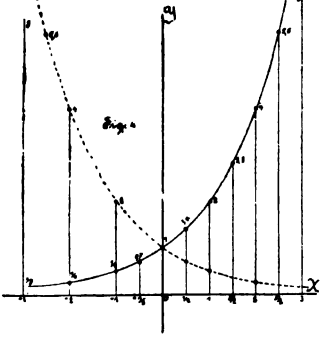
§ 6. Die Exponentialfunktion und die logarithmische Function.

I. Wird die Basis einer Potenz constant und gleich der positiven Zahl a erhalten, der Exponent aber als eine veränderliche Größe x betrachtet, dann entsteht die Function $y = a^x$, die als „Exponentialfunction" bezeichnet wird. Bei der geometrischen Veranschaulichung müssen wir zwei verschiedene Fälle unterscheiden:

Erster Fall: $a > 1$ z. B. $a = 2$. Also $y = 2^x$

$y = 2^x$

x	y
0	1
$\frac{1}{2}$	1,4142
1	2
$\frac{3}{2}$	2,8284
2	4
3	8
4	16
∞	$+\infty$
$-g$	$\frac{1}{2^g}$
-1	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{4}$
$-\infty$	0

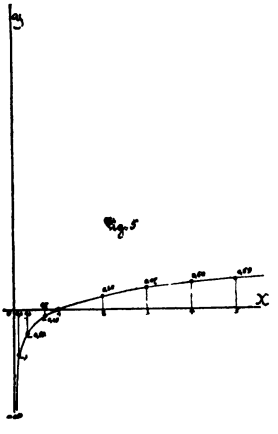


Zweiter Fall: $a < 1$ z. B. $a = \frac{1}{2}$. Also $y = (\frac{1}{2})^x$

$y = (\frac{1}{2})^x$	
x	y
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$
∞	0
-1	2
-2	4
-3	8
-4	16
$-\infty$	$+\infty$

Die Funktion $y = a^x$ stellt also, wie aus Fig. 4 ersichtlich, eine Curve dar, die völlig oberhalb der x-Axe verläuft und diese zur Asymptote hat. Im Fall $a > 1$, wird y für $x = -\infty$ zu 0. Im Fall $a < 1$ dagegen für $x = +\infty$ zu Null.

II. Löst man die Gleichung $y = a^x$ nach x auf, dann erhält man die inverse Function $x = \log_{(a)} y$. (Vergl. § 3. IV.). Die „logarithmische Function" $y = \log_{(a)} x$ kann also durch dieselbe Curve dargestellt werden wie $y = a^x$; nur hat diese Curve eine andere Lage, weil die Axen x und y mit einander vertauscht sind. Nimmt man z. B. $a = 10$, also $y = \log_{(10)} x$, dann erhält man folgende Tabelle:



(Für negative Werte von x giebt es keine reellen Werte von y. Denn ist $y = \log_{(10)} (-p)$, dann muß auch die inverse Gleichung

$y = \log_{(10)} x$

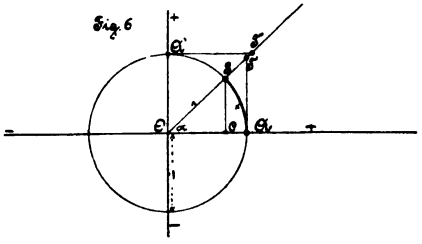
x	y
0	$-\infty$
0,1	— 1
0,3	— 0,52288
0,7	—0,1549
1	0
2	0,30103
3	0,47712
10	1
100	2
∞	∞

gelten: $-p = 10^y$. Wird nun y positiv oder negativ genommen, so wird stets 10^y positiv und niemals negativ, also ist diese letzte Gleichung unmöglich, somit auch die erste. Die Curve hat also die in Fig. 5 dargestellte Form.)

§ 7. Die trigonometrischen Functionen.

I. Die in der Differentialrechnung gebräuchlichen trigonometrischen Functionen sind von denen der Elementarmathematik durch ihre Definition verschieden. Es besteht zwischen beiden allerdings ein naher Zusammenhang, den wir aufzuzeigen haben.

Bei der Definition der genannnten Functionen gehen wir von einem mit dem Radius $r = 1$ ge-



zeichneten Kreis (Einheitskreis) aus. Auf der Peripherie dieses Kreises setzen wir einen Punkt A als Anfangspunkt fest und verbinden ihn mit dem Mittel-

punkt O des Kreises durch eine feste Gerade (Fig. 6). Die Neigung jedes anderen durch O gehenden Strahles OS bestimmen wir nun durch den Bogen AS = x; und zwar wollen wir diesen Bogen als positiv betrachten, wenn er von A nach oben, als negativ, wenn er von A nach unten zu messen ist. Zwischen dem Bogen x und dem zugehörigen Winkel α bestehen nun folgende einfache Beziehungen: Der Umfang des Kreises vom Radius r = 1 ist 2π; dies entspricht einem Winkel von 360° in Winkelmaß. Ferner entspricht einem Winkel von 1° ein Bogen von $\frac{2\pi}{360}$ und endlich einem Winkel von n° ein Bogen $n \cdot \frac{2\pi}{360}$. Man kann also jede in Winkelmaß gemessene Richtung auch leicht in Bogenmaß umrechnen und umgekehrt. Es seien im Nachfolgenden für einige wichtige Winkelwerte die zugehörigen Bogenwerte angegeben:

Es entspricht also

einem Winkel von	ein Bogen
1°	$\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$
30°	$\frac{\pi}{6}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
120°	$\frac{2\pi}{3}$

einem Winkel von	ein Bogen
135^0	$\frac{3\pi}{4}$
150^0	$\frac{5\pi}{6}$
180^0	π
270^0	$\frac{3\pi}{2}$
360^0	2π

Nimmt man auch Winkel über 360^0 an, indem man den gleichen Winkelraum ein zweites, drittes u. s. w. Mal durchläuft, dann wird auch der zugehörige Bogen ein zweites, drittes Mal durchlaufen; einem Winkel von 750^0 entspricht dann ein Bogen $\frac{750 \cdot 2\pi}{360} = \frac{25\pi}{6} = \pi \cdot 4\frac{1}{6}$ u. ä. Wir werden von jetzt ab alle Richtungen stets in Bogenmaß angeben. Insbesondere werden wir stets von sin, cos u. s. w. eines Bogens sprechen.

II. Unter dem Sin des Bogens $AS = x$ — $\sin x$ — versteht man die von dem Endpunkt S auf die Axe gefällte Senkrechte SC; unter $\cos x$ die hierbei entstehende Strecke OC; wobei die Vorzeichen wie beim Coordinatensystem zu bestimmen sind. Der Zusammenhang mit den Winkelfunctionen wird durch die folgenden Gleichungen hergestellt:

$$\sin \alpha = \frac{SC}{OS} = \frac{SC}{1} = \sin x$$

$$\cos \alpha = \frac{OC}{OS} = \frac{OC}{1} = \cos x$$

Nach dem pythagoreiſchen Lehrſatz iſt

$SC^2 + OC^2 = OS^2$; alſo auch

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

III. Um tg x zu definiren, errichten wir in A, um cot x zu definiren in A′ eine Tangente an den Kreis; dann nennen wir die Strecken

$$AT = \text{tg } x$$
$$A'T' = \cot x.$$

Die Gleichungen:

$$\text{tg } \alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = \text{tg } x$$

$$\cot \alpha = \text{tg } (90^0 - \alpha) = \frac{A'T'}{OA'} = \frac{A'T'}{1} = \cot x$$

ſtellen wieder den Zuſammenhang mit den in der Elementarmathematik gebräuchlichen Functionen tg und cot dar.

Übungsaufgaben:

1) Welches Bogenmaß entſpricht: a) einer Minute, b) einer Sekunde in Winkelmaß?

2) Welches Bogenmaß entſpricht den Winkeln:

$67^0\ 30'$
$40^0\ 53'$
$270^0\ 58'$
1230^0 ?

3) Welche Neigung in Bogenmaß haben zwei ſenkrechte Gerade zu einander?

4) Welchen Zahlenwert haben die Ausdrücke

$$\sin \frac{\pi}{6};\ \cos \frac{\pi}{3};\ \text{tg } \frac{\pi}{4};\ \cot \frac{\pi}{2}?$$

5) Ebenſo die Ausdrücke

$$\sin(4\tfrac{1}{2}\,\pi);\ \cos(8\,\pi);\ \operatorname{tg}\left(\frac{3\,\pi}{2}\right).\ \cot(5\,\pi).\ ?$$

6) Die Richtigkeit folgender Formeln ſoll dargethan werden:

$$\sin(x + 2\,n\,\pi) = \sin x$$
$$\cos(x + 2\,n\,\pi) = \cos x$$
$$\operatorname{tg}(x + n\,\pi) = \operatorname{tg} x$$
$$\cot(x + n\,\pi)\ \cot x,$$

wobei n eine ganze Zahl bedeutet.

7) Die folgenden Formeln ſind abzuleiten!

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\operatorname{tg} x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cot x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

8) Ebenſo die Formeln!

$$\sin x = \sin(\pi - x)$$
$$\cos x = -\cos(\pi - x)$$
$$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x)$$
$$\cot x = -\cot(\pi - x)$$

9) Ebenſo die Formeln!

$$\sin x = -\sin(-x)$$
$$\cos x = \cos(-x)$$
$$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x)$$
$$\cot x = -\cot(-x)$$

10) Ebenſo die Formel $\operatorname{tg} x.\ \cot x = 1.$

§ 8. Fortsetzung: Geometrische Darstellung.

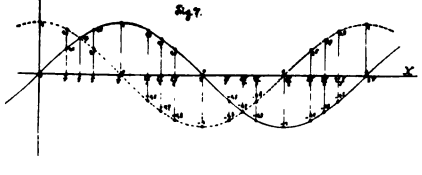
I. Bei der geometrischen Darstellung trigonometrischer Functionen ist es zweckmäßig, die x-Axe in Vielfache und Bruchteile der Zahl $\pi = 3{,}14159$ einzuteilen, weil auf ihr die Länge der Bögen des Einheitskreises aufgetragen werden. Wählt man zunächst Werte von 0 bis 2π (0° bis 360°), dann erhält man die folgenden Tabellen:

	$y = \sin x$	
	x	y
0°	0	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	0,5
45°	$\frac{\pi}{4}$	0,707
60°	$\frac{\pi}{3}$	0,866
90°	$\frac{\pi}{2}$	1
120°	$\frac{2\pi}{3}$	0,866
135°	$\frac{3\pi}{4}$	0,707
150°	$\frac{5\pi}{6}$	0,5
180°	π	0
210°	$\frac{7\pi}{6}$	— 0,5

	$y = \cos x$	
	x	y
0°	0	1
30°	$\frac{\pi}{6}$	0,866
45°	$\frac{\pi}{4}$	0,707
60°	$\frac{\pi}{3}$	0,5
90°	$\frac{\pi}{2}$	0
120°	$\frac{2\pi}{3}$	— 0,5
135°	$\frac{3\pi}{4}$	— 0,707
150°	$\frac{5\pi}{6}$	— 0,866
180°	π	— 1
210°	$\frac{7\pi}{\pi}$	— 0,866

	$y = \sin x$			$y = \cos x$	
	x	y		x	y
225^0	$\frac{5\pi}{4}$	— 0,707	225^0	$\frac{5\pi}{4}$	— 0,707
240^0	$\frac{4\pi}{3}$	— 0,866	240^0	$\frac{4\pi}{3}$	— 0,5
270^0	$\frac{3\pi}{2}$	— 1	270^0	$\frac{3\pi}{2}$	0
300^0	$\frac{5\pi}{3}$	— 0,866	300^0	$\frac{5\pi}{3}$	0,5
315^0	$\frac{7\pi}{4}$	— 0,707	315^0	$\frac{4\pi}{4}$	0,707
330^0	$\frac{11\pi}{6}$	— 0,5	330^0	$\frac{11\pi}{6}$	0,866
360^0	2π	0	360^0	2π	1

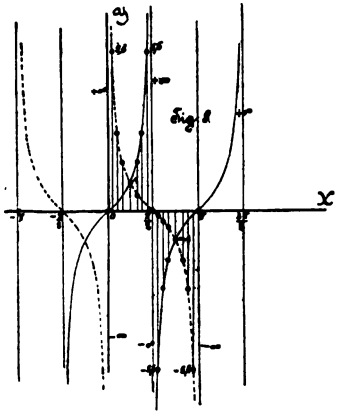
Nimmt man für x Werte an, die größer sind als 2π, dann werden sich die Werte von $y = \sin x$ und $y = \cos x$ genau in der gleichen Weise wiederholen. Durchläuft man x im negativen Sinn, also von 0 über $-\frac{\pi}{2}$ nach -2π, dann erhält man für $y = \sin x$ und $y = \cos x$ dieselben Werte wie beim Durchlaufen der Richtung 2π über $\frac{3\pi}{2}$ nach 0. Das heißt also: die Sinus- wie die Cosinuscurve besteht aus unendlich vielen congruenten Bögen. (Verg. Fig. 7.)



Die Sinuscurve ſtimmt, wie man ſieht, ihrer Geſtalt nach mit der Coſinuscurve völlig überein; nur iſt die eine der beiden Curven um das Stück $\frac{\pi}{2}$ auf der x-Axe verſchoben; dies entſpricht der aus der Trigonometrie bekannten Formel:
$\cos \alpha = \sin (90^0 \pm \alpha)$ reſp. $\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

II. Um die Functionen $y = \operatorname{tg} x$ und $y = \operatorname{cot} x$ darzuſtellen, nehmen wir für x zunächſt nur Werte zwiſchen 0 und π an. Alſo:

	$y = \operatorname{tg} x$			$y = \operatorname{cot} x$	
	x	y		x	y
0^0	0	0	0^0	0	∞
45^0	$\frac{\pi}{4}$	1	45^0	$\frac{\pi}{4}$	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	1,732	60^0	$\frac{\pi}{3}$	0,577
70^0	$\frac{7\pi}{18}$	2,747	70^0	$\frac{7\pi}{18}$	0,364
80^0	$\frac{4\pi}{9}$	5,671	80^0	$\frac{4\pi}{9}$	0,176
90^0	$\frac{\pi}{2}$	∞	90^0	$\frac{\pi}{2}$	0
100^0	$\frac{5\pi}{9}$	— 5,671	100^0	$\frac{5\pi}{9}$	— 0,176
110^0	$\frac{11\pi}{18}$	— 2,747	110^0	$\frac{11\pi}{18}$	— 0,364
120^0	$\frac{2\pi}{3}$	— 1,732	120^0	$\frac{2\pi}{3}$	— 0,577
135^0	$\frac{3\pi}{4}$	— 1	135^0	$\frac{3\pi}{4}$	— 1
180^0	π	0	180^0	π	— ∞



Nimmt man nun für x Werte, die größer sind wie π oder kleiner wie 0, dann werden sich, wie man aus der Trigonometrie weiß, die Werte für tg x und cot x in der gleichen Reihenfolge wiederholen. Es besteht also die Tangens- wie die Cotangenscurve aus unendlich vielen congruenten Zweigen. (V. Fig. 8.)

§ 9. Die Arcusfunctionen.

I. Unter den „Arcusfunctionen" versteht man die Umkehrung (Inversion) der trigonometrischen Functionen. Es sei z. B. a ein gegebener Bogen und t der zugehörige Sinus; dann ist $t = \sin a$. Will man diese Gleichung nach a auflösen, dann muß man sagen: a ist derjenige Bogen (arcus), dessen Sinus gleich a ist. Dies drückt man durch die folgende Schreibweise aus:

$$a = \arcsin t \quad \text{(a gleich Arcus-Sinus t)}$$

Es ist also:	die Umkehrung von:
$a = \arcsin t$	$t = \sin a$
$a = \arccos t$	$t = \cos a$
$a = \operatorname{arctg} t$	$t = \operatorname{tg} a$
$a = \operatorname{arccot} t$	$t = \operatorname{cot} a$.

Zeichnet man also die den Arcus-Functionen:

$$y = \arcsin x$$
$$y = \arccos x$$
$$y = \operatorname{arctg} x$$
$$y = \operatorname{arccot} x$$

entsprechenden Curven, so muß man natürlicherweise dieselben Curven erhalten, die den Gleichungen:

$$x = \sin y$$
$$x = \cos y$$
$$x = \operatorname{tg} y$$
$$x = \operatorname{cot} y$$

zugehörigen. Dies sind aber die in den Fig. 7 und 8 gezeichneten Curven; nur ist die x-Axe mit der y-Axe vertauscht.

II. Aus allen bisher behandelten Functionen lassen sich nun durch gegenseitige Addition, Multiplikation u. s. w. neue, zusammengesetzte Functionen in unbegrenzter Zahl ableiten. Jeder dieser Functionen kann man eine Curve zur Seite stellen. Es wird später unsere Aufgabe sein, derartige zusammengesetzte Functionen näher zu studieren.

Übungsaufgaben.

1) Es soll der Gang der Functionen

$$y = \arcsin x$$
$$y = \arccos x$$
$$y = \operatorname{arctg} x$$
$$y = \operatorname{arcot} x$$

durch Aufsuchen der einander zugehörigen Werte von x und y bestimmt werden.

2) Jeder Ausdruck

$$y = \text{arctang } x, \arcsin x \text{ u. s. w.}$$

ist vieldeutig, d. h. zu jedem Wert von x existieren viele Werte von y (unendlich viele). Warum?

3) Welche Werte haben die Ausdrücke:

arsin $(\frac{1}{2})$? $(\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi; \frac{13}{6}\pi; \frac{17}{6}\pi \ldots\ldots)$

arccos $(\frac{1}{2})$? $(\frac{\pi}{3}; \frac{5}{3}\pi; \frac{7}{3}\pi; \frac{11}{3}\pi \ldots\ldots)$

arcot (1)? $(\frac{\pi}{4}; \frac{5}{4}\pi; \frac{9}{4}\pi; \frac{13}{4}\pi \ldots\ldots)$

arctg (1)? $(\frac{\pi}{4}; \frac{5}{4}\pi; \frac{9}{4}\pi; \frac{13}{4}\pi \ldots\ldots)$

4) Ebenso die Ausdrücke:

arsin	(0,45658)	arcsin	(0,89751)
arcos	(0,65825)	arcos	(0,98217)
arctang	(0,24315)	arctg	(22,90376)
arcot	(0,98676)	arccot	(1,25717)?

5) Folgende Functionen sollen geometrisch veranschaulicht werden:

$y = 4 \sin x$ $\qquad$ $y = 4 \cos x$

$y = 1 + \frac{1}{10}^{3} \operatorname{tg} x$ $\qquad$ $y = 1 - \frac{1}{10} \cot x$

$y = \sqrt{\sin x}$ $\qquad$ $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$

6) Ebenso die Functionen:

$y = x \cdot 2^x$ $\qquad$ $y = x^2 \cdot 2^x$

$y = 2^{x+1}$ $\qquad$ $y = 2^{x^2}$

$y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\qquad$ $y = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

§ 10. Grenze.

I. Wenn eine veränderliche Größe x einer constanten Zahl g immer näher und näher kommt, sodaß die Differenz $g - x$ schließlich beliebig klein wird, dann sagt man die Zahl g wäre die Grenze von x, oder x convergiere gegen g. In mathematischen Zeichen:

$\lim x = g$ (Limes von $x = g$)

Beispiele: 1) Eine Veränderliche x nehme die Werte an:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}$$
$$x_3 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{7}{4}$$
$$x_4 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 1\tfrac{5}{8}$$
$$x_5 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = 3\tfrac{1}{16}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$x^n = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \ldots\ldots\ldots \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Wenn nun auch x immer größere und größere Werte annimmt, so kann doch sein Wert die Zahl 2 nie überschreiten. Ferner ist

$$2 - x_1 = 1$$
$$2 - x_2 = \tfrac{1}{2}$$
$$2 - x_3 = \tfrac{1}{4}$$
$$2 - x_4 = \tfrac{1}{8}$$
$$2 - x^n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}$$

für $n = \infty$ wird aber $2 - x_n = \frac{1}{2^\infty} = 0$.

Je größer also x wird, desto weniger unterscheidet es sich von der Zahl 2. Wir sagen also x habe 2 zur Grenze, oder x convergiere gegen 2.

$$\lim x = 2.$$

2. Sei x definiert als echter Bruch, dessen Zähler immer um eins kleiner ist als der Nenner, dann kann es die Werte annehmen.

$$x = \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{5}{6}, \ldots\ldots \tfrac{n-1}{n}.$$

Nimmt man hier für den Zähler und somit auch für den Nenner immer größere Werte, dann wird auch x immer größer und größer, kann aber nie größer werden als 1. Ferner ist:

$$1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \qquad 1 - \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{4}$$
$$1 - \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{3} \qquad 1 - \tfrac{4}{5} = \tfrac{1}{5}$$

$1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$; also für $n = \infty$ gleich 0.

D. h. je größer x wird, desto weniger unterscheidet es sich von 1; also ist

$$\lim x = 1.$$

3. Der Ausdruck $y = \frac{3}{1-\frac{1}{x}}$ hat für jeden Wert von x, der größer ist wie 1 einen bestimmten endlichen Wert.

Für	$x =$	2 ist	$y = 6$
	$x =$	3 „	$y = 4{,}5$
	$x =$	4 „	$y = 4$
	$x =$	5 „	$y = 3\frac{3}{4}$
	$x =$	6 „	$y = 3\frac{3}{5}$
	$x =$	7 „	$y = 3\frac{1}{2}$
	$x =$	10 „	$y = 3\frac{1}{3}$
	$x =$	100 „	$y = 3\frac{1}{33}$
	$x =$	1000 „	$y = 3\frac{1}{333}$
	$x =$	10000 „	$y = 3\frac{1}{3333}$
		⋮	⋮

Je größer also x wird, desto kleiner wird $\frac{1}{x}$, desto näher kommt aber y der Zahl 3. Also ist

$$\lim \frac{3}{1-\frac{1}{x}} = 3 \quad (\text{für } x = \infty).$$

Dies wird auch folgendermaßen geschrieben:

$$\lim_{x=\infty} \frac{3}{1-\frac{1}{x}} = 3$$

II. Der Ausdruck $\frac{x^n - \alpha^n}{x - \alpha}$, wobei α eine unveränderliche Zahl bedeutet, hat für jeden Wert von x einen bestimmten Wert; sobald jedoch x näher und näher an α heranrückt, wird sowohl der Zähler wie

der Nenner immer kleiner und für $x = \alpha$ erscheint der Bruch in der Form $\frac{0}{0}$.

Der Ausdruck $\frac{0}{0}$ hat keine eigentliche Bedeutung, sondern kann gleich jeder beliebigen Zahl sein. (Aus der richtigen Gleichung: $0 = 0 \cdot 17$ folgt z. B. $\frac{0}{0} = 17$). Es erwächst uns daher die Aufgabe, den Grenzwert

$$\lim_{x=\alpha} \frac{x^n - \alpha^n}{x - \alpha}$$

zu bestimmen.

Zu diesem Zweck formen wir den Ausdruck, bevor wir zur Grenze übergehen nach der bekannten Formel über geometrische Reihen um in:

$$\frac{x^n - \alpha^n}{x - \alpha} = x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \alpha^2 x^{n-3} + \ldots\ldots \alpha^{n-2} x + \alpha^{n-1}$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung ergiebt sich aus der Bemerkung, daß der rechtsstehende Ausdruck eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{\alpha}{x}$ darstellt. Setzt man in dieser Reihe $x = \alpha$, dann findet man

$$\lim_{x=\alpha} \frac{x^n - \alpha^n}{x - \alpha} = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-1} + \ldots + \alpha^{n-1}$$

oder:
$$\lim_{x=\alpha} \frac{x^n - \alpha^n}{x - \alpha} = n\, \alpha^{n-1}$$

III. Wenn eine Veränderliche kleiner wird, wie jede noch so kleine Zahl, d. h. also wenn sie die Zahl 0 zur Grenze hat, dann sagt man, sie werde „unendlich klein". Wenn eine Veränderliche größer wird, wie jede noch so große Zahl, dann sagt man, die Veränderliche „wachse unbegrenzt" oder sie werde „unendlich groß".

Übungsaufgaben:

Welchen Wert haben die Ausdrücke:

1) $\lim (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots)$ $(\frac{3}{2})$
2) $\lim (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - + \dots)$ $(\frac{2}{3})$
3) $\lim (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots)$ ∞
4) $\lim\limits_{x=3} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$ (27).
5) $\lim\limits_{x=5} \dfrac{x^4 - 625}{x - 5}$ (600)
6) $\lim\limits_{x=2} \dfrac{5}{1 - \frac{1}{x-2}}$ (0)
7) $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{3x^2 + 4x - 7}{5x^2 - 7x + 1}$ $(\frac{3}{5})$
8) $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{4x^6 + 1}{x^6 - 1}$ (4)
9) $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^4 + 7x^2 + x - 2}$ (0)

In den 3 letzten Aufgaben dividirt man, bevor man zur Grenze übergeht, Zähler und Nenner durch die höchste Potenz von x, also durch x^2, resp. x^6, resp. x^4.

§ 11. 2 wichtige Grenzwerte.

I. Der Ausdruck

$y = (1 + \frac{1}{z})^z$ hat für jeden Wert von Z einen ganz genau bestimmten Wert, z. B.

für $z = 0{,}1$ ist $y = 1{,}1^{0{,}1} = 1{,}271$
„ $z = 1$ „ $y = 2^1 = 2$
„ $z = 2$ „ $y = (\frac{3}{2})^2 = 2{,}25$
„ $z = 3$ „ $y = (\frac{4}{3})^3 = 2{,}36\ldots$
u. s. w.

Nimmt nun z immer größere Werte an, dann wird auch y größer; und es entsteht nun die Frage: Wird y schließlich unendlich groß, oder hat es einen endlichen Grenzwert, den es nicht überschreiten kann? Wir suchen also den Wert des Ausdruckes

$$\lim_{z=\infty} \left(1 + \tfrac{1}{z}\right)^z.$$

Man sieht sofort, daß für $z = \infty$ dieser Ausdruck die unbestimmte Form 1^∞ annimmt. Um nun den eigentlichen Grenzwert zu finden, entwickeln wir $\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z$ nach dem binomischen Lehrsatz:

$$(a + b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} b + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \cdots$$

Dann findet man:

$$\left(1 + \tfrac{1}{z}\right)^z = 1 + z \cdot \tfrac{1}{z} + \frac{z\,(z-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{z \cdot (z-1)\,(z-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{z^3} + \cdots$$

$$= 1 + 1 + \frac{\frac{z-1}{z}}{1 \cdot 2} + \frac{\frac{z-1}{z} \cdot \frac{z-2}{z}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

und nach einer weiteren Umformung:

$$\left(1 + \tfrac{1}{z}\right)^z = 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{z}}{1 \cdot 2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{z}\right)\left(1 - \frac{2}{z}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\left(1 - \frac{1}{z}\right)\left(1 - \frac{2}{z}\right)\left(1 - \frac{3}{z}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdots$$

Läßt man nun z unendlich groß werden, dann werden die Brüche

$$\tfrac{1}{z}, \tfrac{2}{z}, \tfrac{3}{z} \text{ u. s. w.}$$

alle gleich 0.

Also:

$$\lim_{z=\infty}\left(1+\tfrac{1}{z}\right)^z = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdots$$

Wir haben also den Ausdruck in eine unendliche Reihe verwandelt. Um zu prüfen, ob diese Reihe einen endlichen Wert hat, vergleichen wir sie mit einer anderen Reihe, deren Wert wir kennen. Nämlich mit der vom zweiten Glied ab geometrischen Reihe

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+--,$$

deren Wert nach § 10 I gleich 3 ist.

Wir haben dann:

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+=3$$

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdots=\lim_{z=\infty}\left(1+\tfrac{1}{z}\right)^z$$

Die ersten Glieder stimmen in beiden Reihen überein. Vom 4ten Glied ab ist aber stets in der zweiten Reihe der Nenner größer;

$$1\cdot 2\cdot 3 > 2\cdot 2$$
$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 > 2\cdot 2\cdot 2$$
$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 > 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$$

u. s. w.

Folglich ist vom 4ten Glied an jedes Glied der zweiten Reihe kleiner als das entsprechende der ersten Reihe. Also ist die 2te Reihe kleiner als die erste

D. h. $\lim_{z=\infty}\left(1+\tfrac{1}{z}\right)^z < 3.$

Es muß also notwendigerweise für $\left(1+\tfrac{1}{z}\right)^z$

ein Grenzwert existiren. Nennen wir diesen Grenzwert e, dann ist also

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots\cdots$$

Zur Berechnung von e haben wir

$$\begin{array}{rl}
1 & = 1{,}000000 \\
\frac{1}{1} & = 1{,}000000 \\
\frac{1}{1 \cdot 2} & = 0{,}500000 \\
\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} & = 0{,}166666 \\
\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} & = 0{,}041666 \\
\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} & = 0{,}008333 \\
\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} & = 0{,}001388 \\
\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} & = 0{,}000198 \\
\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} & = 0{,}000024 \\
\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} & = 0{,}000002 \\
\vdots & \vdots \\
\hline
e & = 2{,}718277
\end{array}$$

Ein auf 12 Stellen genauer Wert von e ist 2,718281828459 . . . . .

Wir können also jetzt sagen

$$\lim_{z = \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e = 2{,}71828 \ldots\ldots$$

II. Der Ausdruck

$$y = \frac{\sin z}{z}$$

hat für jeden Wert von z einen bestimmten Wert.

Für $z = 2\pi$ ist $y = 0$

„ $z = \frac{3}{2}\pi$ ist $y = -\frac{2}{3\pi}$

„ $z = \frac{\pi}{2}$ ist $y = \frac{2}{\pi}$

u. s. w.

Nähert sich jedoch z dem Wert 0, dann nähert sich auch Sin z dem Wert 0 und der Bruch $\frac{\text{Sin } z}{z}$ erhält die Form $\frac{0}{0}$. Es erhebt sich also hier die Frage nach dem Wert des Ausdrucks:

$$\lim_{z=0} \frac{\sin z}{z}$$

In der Fig. 9 besteht die Beziehung:

Dreieck 0SC < Sector 0SA < Dreieck 0TA

oder: $\frac{0C.\ SC}{2} < \frac{SA.\ 0A}{2} < \frac{TA.\ 0A}{2}$

oder: $\cos z \sin z < z < \text{tg } z$

und wenn man diese Ungleichung durch sin z dividirt

$$\cos z < \frac{z}{\sin z} < \frac{1}{\cos z}$$

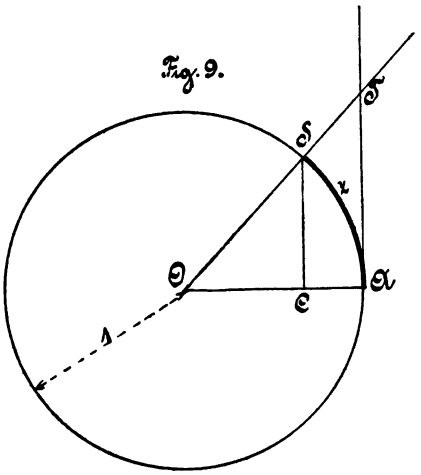
Läßt man nun $z = 0$ werden, dann findet man

$$1 < \lim_{z=0} \frac{z}{\sin z} < 1$$

d. h. $\lim_{z=0} \frac{z}{\sin z} = 1$

also auch $\lim_{z=0} \frac{\sin z}{z} = 1$

Fig. 9.



§ 12. Der Differenzenquotient.

I. Ist die Veränderliche y eine Function der Veränderlichen x, ist etwa

$$y = f(x),$$

dann wird, wenn man x von einem bestimmten Wert ab wachsen läßt, y ebenfalls sich ändern und zwar entweder wachsen oder abnehmen. In beiden Fällen können wir nach dem Maaß des Wachsens (oder Abnehmens) fragen. Wächst z. B. x von dem Wert x bis zum Wert x_1, dann wird y von dem Wert $y = f(x)$ bis zum Wert $y_1 = f(x_1)$ wachsen (oder abnehmen). Die Zunahme, die hierbei die Veränderliche x erfahren hat, ist

$$x_1 - x;$$

diejenige von y ist

$$y_1 - y \text{ oder } f(x_1) - f(x).$$

Um diese Zunahmen mit einander zu vergleichen, muß man den Quotienten bilden

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Für die Differenz $x_1 - x$ führt man zur Abkürzung das Zeichen $\triangle x$ (Delta x), für $y_1 - y$ das Zeichen $\triangle y$ (Delta y) ein. Hierbei soll jedoch $\triangle$ nicht irgend ein Faktor, sondern lediglich ein vor x oder y gestellter Index sein. Der Ausdruck $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ist dann das Verhältnis der beiden Zunahmen und führt den Namen

„Differenzenquotient".

Wir können also sagen: Durch den Differenzenquotienten

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

wird die Zunahme der Function f(x) mit der Zunahme der Veränderlichen x verglichen.

Beispiel: Gegeben sei die Function

$$y = x^2 - 2$$

Für $x = 4$ ist $y = 14$

$x_1 = 6$ ist $y_1 = 34$

Es ist also x um das Stück $\triangle x = 6 - 4 = 2$

y „ „ „ $\triangle y = 34 - 14 = 20$

gewachsen. Um die Zunahme von y mit derjenigen von x zu vergleichen, bilden wir den Differenzenquotienten:

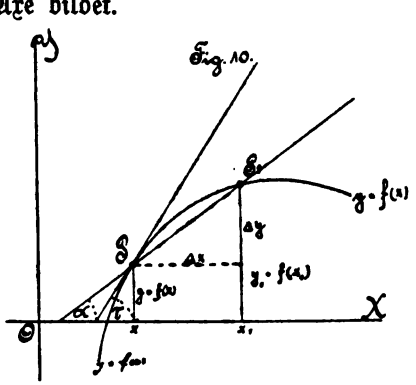
$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{20}{2} = \frac{10}{1}$$

D. h.: Die Zunahme von y ist 10 mal so stark als diejenige von x.

II. Um die Sache geometrisch zu veranschaulichen, denken wir uns die zur Function $y = f(x)$ gehörige Curve gezeichnet. Gehen wir dann auf der Curve von P nach P_1, dann nimmt x von x bis x_1 und y von y bis y_1 zu. $\triangle x$ ist dann die Zunahme der Abscisse, $\triangle y$ die Zunahme der Ordinate. $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ist dann das Verhältnis dieser beiden Zunahmen. Verbindet man P mit P_1, dann erhält man das bei Q rechtwinklige Dreieck P_1QP. Nennt man nun α den Winkel, den die Secante PP_1 mit der positiven x-Axe bildet, dann ist

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \text{tang } \alpha.$$

D. h.: Der Differenzenquotient ist gleich dem Tangens des Winkels, den die Sehne mit der positiven x-Axe bildet.



III. Eine weitere Veranschaulichung bietet uns die Mechanik: Sei z. B. t die seit Beginn einer Be-

wegung verflossene Zeit (etwa in Secunden), s der dabei zurückgelegte Weg, dann gehört zu jedem Wert von t ein bestimmter Wert von s. Es ist also s eine Function von t, etwa $s = f(t)$. Wächst nun t von t bis t_1, dann wird s von $s = f(t)$ bis $s_1 = f(t_1)$ wachsen. Es ist daher

$\triangle t = t_1 - t =$ die Zunahme der Zeit
$\triangle s = s_1 - s = f(t_1) - f(t) =$ die Zunahme des Wegs.

Während der Zeit $\triangle t$ hat aber der in Bewegung befindliche Körper den Weg $\triangle s$ zurückgelegt. Der Differenzenquotient $\frac{\triangle s}{\triangle t}$ gibt daher die mittlere Geschwindigkeit des Körpers von der Zeit t bis zur Zeit t_1 an.

Z. B.: Für einen frei fallenden Körper ist $s = \frac{1}{2} gt^2$ (g sei annähernd = 10).

Ist $t = 5''$, dann ist $s = 125$ m
„ $t_1 = 7''$, „ „ $s_1 = 245$ m.

Die Zunahme der Zeit ist $7 - 5 = 2'' = \triangle t$.
„ „ des Wegs ist $245 - 125 = 120\,\text{m} = \triangle s$.
Die mittlere Geschwindigkeit von der 5. bis zur 7. Secunde ist also $\frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{120}{2} = 60\,\frac{\text{m}}{\text{sec.}}$

IV. y kann, wie wir oben gesehen haben, auch abnehmen, während x zunimmt. Dann ist also $y_1 < y$, also $y_1 - y = \triangle y$ negativ; in diesem Fall wird also auch der Differenzenquotient $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ negativ werden.

§ 13. Der Differentialquotient.

I. Wächst in der Function $y = f(x)$, während x um das Stück $\triangle x$ zunimmt, y um das Stück

$\triangle$ y, dann haben wir, wie wir im vorigen § sahen, in dem Differenzenquotienten $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ein Maaß für die Zunahme der Function $y = f(x)$. Hierbei ist $\triangle$ x und somit auch $\triangle$ y als eine endliche Größe zu betrachten. Je nach der Größe von $\triangle$ x wird dann auch $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ einen verschiedenen Wert haben. Um daher ein Maaß für die Steigung der Function an der Stelle y zu haben, muß man $\triangle$ x möglichst klein nehmen; dann wird im Allgemeinen auch $\triangle$ y sehr klein werden. $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ gewinnt hierbei die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$. Es entsteht infolge dessen die Aufgabe, den Grenzwert des Ausdrucks $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ für $\triangle x = 0$ zu finden:

$$\text{Es ist } \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Wird nun $\triangle x = 0$, dann wird $x_1 = x$. Wir können also auch schreiben:

$$\lim_{\triangle x = 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{x = x_1} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Dieser Grenzwert führt den Namen Differentialquotient und wird mit $\frac{dy}{dx}$ (De Ypsilon nach De Ix) bezeichnet. Man stellt sich dabei vor, daß die endlichen Differenzen $\triangle$y und $\triangle$ x in unendlich kleine Differenzen (Differentiale) übergehen; diese unendlich kleinen Differenzen bezeichnet man zum Unterschied von den endlichen $\triangle$ y und $\triangle$ x eben mit dy und dx. Für „Differentialquotient" wollen wir uns der Abkürzung D. Q. bedienen.

Beispiel: Die Function $y = x^3$ sei gegeben, und es werde für den Wert $x = 4$ das Maaß der Zunahme von y gesucht. Läßt man x von x bis x_1 wachsen, dann wird y von $y = x^3$ bis $y_1 = x_1^3$ wachsen. Der Differenzenquotient $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ wird dann:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1^3 - x^3}{x_1 - x}$$

Für den letzteren Ausdruck kann man setzen: $x_1^2 + x_1 \cdot x + x^2$.

Es ist also für die Function $y = x^3$ der Differenzenquotient $\frac{\triangle y}{\triangle x} = x_1^2 + x_1 \cdot x + x^2$.

Dieser Ausdruck stellt die Zunahme der Function von y dar, wenn x von x bis x_1 geht, also wenn x um das endliche Stück $x_1 - x = \triangle x$ sich ändert. Wird aber dieses Stück $\triangle x$ sehr klein und schließlich $= 0$, dann wird $x_1 = x$ und wir erhalten den Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\triangle x = 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{x_1 = x} \frac{x_1^3 - x^3}{x_1 - x}$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x_1 = x} (x_1^2 + x_1 \cdot x + x^2).$$

Also: $\frac{dy}{dx} = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$

Im Punkt x der Function $y = f(x)$ beträgt also das Maaß der Zunahme $3x^2$; das heißt y nimmt um das $3x^2$-fache zu wie x.

Für $x = 4$ ist $\frac{dy}{dx} = 3 \cdot 4^2 = 48$. In Punkt $x = 4$ nimmt also y 48mal so stark zu wie x.

II. Wir sahen im vorigen § (vergl. auch Fig. 10), daß der Differenzenquotient $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ eine geometrische Bedeutung hat, und zwar ist $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \operatorname{tg} \alpha$, wobei α derjenige Winkel ist, den die Sehne PP_1 mit der positiven Richtung der x-Axe bildet. Wir fragen nun: Kommt auch dem D. Q. eine geometrische Bedeutung zu, und welche?

Wird $x_1 - x = \triangle x$ kleiner und kleiner, das heißt rückt der Punkt P_1 der Curve näher und näher an den Punkt P heran, dann wird auch $y_1 - y = \triangle y$ kleiner und kleiner. Dabei dreht sich die Sehne PP_1 um den festen Punkt P und wird schließlich zur Tangente. Der Winkel α, den die Sehne mit der positiven x-Axe bildet, geht dabei in den Winkel τ (Tau) über, d. h. in den Winkel, den die Tangente mit der positiven x-Axe bildet.

Da nun nach dem vorigen §

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\triangle y}{\triangle x}, \text{ so wird nunmehr}$$

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx}$$

D. h. Der Differentialquotient ist gleich dem Tangens des Winkels, den die Tangente der Curve mit der positiven Richtung der x-Axe bildet.

III. Im vorigen § sahen wir ferner, daß der Differenzenquotient $\frac{\triangle s}{\triangle t}$ in der Mechanik die Bedeutung der „mittleren Geschwindigkeit während der Zeit $\triangle t$" besitzt. Welche Bedeutung kommt

nun dem D. Q. $\frac{ds}{dt}$ zu? Nehmen wir $\triangle t$, d. h. den Zeitzuwachs sehr klein an, dann erhalten wir die mittlere Geschwindigkeit während dieser sehr kurzen Zeit und für $\triangle t = 0$ erhalten wir somit die wirkliche Geschwindigkeit zur Zeit t.

Es ist also: $\frac{ds}{dt} = \lim_{\triangle t = 0} \frac{\triangle s}{\triangle t}$

D. h. Der Differentialquotient $\frac{ds}{dt}$ stellt die Geschwindigkeit zur Zeit t dar. Bezeichnen wir die letztere mit v, dann ist

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Beispiel: Für den freien Fall ist wieder

$$s = \tfrac{1}{2} g t^2$$

Der Differenzenquotient

$$\frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} \text{ ist gleich}$$

$$\frac{\tfrac{1}{2} g t_1^2 - \tfrac{1}{2} g t^2}{t_1 - t} \text{ oder}$$

$$\frac{\triangle s}{\triangle t} = \tfrac{1}{2} g \frac{t_1^2 - t^2}{t_1 - t} = \tfrac{1}{2} g (t_1 + t)$$

Dieser Ausdruck stellt nun die mittlere Geschwindigkeit beim freien Fall während der Zeit $\triangle t = t_1 - t$ dar; wollen wir nun die wirkliche Geschwindigkeit im Zeitpunkt t, dann müssen wir $\triangle t = 0$ oder was dasselbe $t_1 = t$ setzen; dann finden wir

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\triangle t = 0} \frac{\triangle s}{\triangle t} = \lim_{t_1 = t} \tfrac{1}{2} g (t_1 + t)$$

Also

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\ g.\ 2\,t = g.\ t.\quad \text{Also}$$

$$v = g.\ t.$$

D. h. Die Geschwindigkeit zur Zeit t ist beim freien Fall $v = g.\ t.$

§ 14. Das Differenzieren.

Zu jeder Function $y = f(x)$ kann man, wie wir in den §§ 12 und 13 sahen, einen Differenzenquotienten $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ aufsuchen. Läßt man dann $\triangle x$ gegen die Null gehen, oder was dasselbe sagt, läßt man $x_1 = x$ werden, dann geht $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ in die Form $\frac{0}{0}$ über, deren Grenzwert zu bestimmen ist. Existiert ein solcher Grenzwert

$$\lim \frac{\triangle y}{\triangle x} \text{ für } \triangle x = 0 \text{ oder}$$

$$\lim \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \text{ für } x_1 = x,$$

dann nennen wir ihn Differentialquotient und bezeichnen ihn mit $\frac{dy}{dx}$.

Man nennt nun die Rechnungsoperation, die darauf ausgeht, zu einer Function $y = f(x)$ den D. Q. $\frac{dy}{dx}$ zu finden, das Differenzieren oder Derivieren (Ableiten). Das Differenzieren stellt also eine Rechnungsart dar, wie etwa das Potenzieren

oder Logarithmieren. Den D. Q. der Function

$$y = f(x)$$

bezeichnet man auch noch mit y' oder $f'(x)$, wobei durch den Strich angedeutet ist, daß y' oder $f'(x)$ durch Differenzieren aus der Function $y = f(x)$ hervorgegangen ist. Es sind also $\frac{dy}{dx}$, y' und $f'(x)$ ganz gleichbedeutende Bezeichnungen. Es wird nun vor allen Dingen unsere Aufgabe sein, die verschiedenen Functionen, die wir in den §§ 5 bis 9 kennen lernten, zu differenzieren, d. h. ihre D. Q. aufzusuchen. Gleichzeitig werden wir auch die Hauptanwendungen des Differenzierens kennen lernen.

§ 15. Die Potenzfunction.

Zunächst betrachten wir die Function $y=x^n$ und suchen ihren Differenzenquotienten. Es ist nun

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1^{\,n} - x^n}{x_1 - x}$$

Da nun $x_1 - x = \triangle x$ so ist

$x_1 = x + \triangle x$. Setzt man diesen Wert in obiger Gleichung ein, dann findet man

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{(\triangle x + x)^n - x^n}{\triangle x}$$

Läßt man nun $\triangle x = 0$ werden, dann wird der Zähler und der Nenner dieses Bruches $= 0$, der Bruch also unbestimmt. Um für diesen Fall seinen Wert zu finden, müssen wir den Bruch, bevor wir $\triangle x = 0$ werden lassen, in geeigneter Weise umformen. Zu diesem Zweck entwickeln wir $(x + \triangle x)^n$ nach dem binomischen Lehrsatz:

$$(x+\triangle x)^n = x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot \triangle x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\triangle x)^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^{n-3} \cdot (\triangle x)^3 + \ldots\ldots$$

Dies in die vorige Gleichung eingesetzt, gibt

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot \triangle x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot (\triangle x)^2 + \ldots\ldots - x^n}{\triangle x}$$

Nun fällt im Zähler x^n gegen $-x^n$ und dann läßt sich durch $\triangle x$ kürzen, wobei man erhält

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = n \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^{n-2} \cdot \triangle x + \ldots + (\triangle x)^{n-1}$$

Dies ist nun die Form des Differenzenquotienten nach der Umformung. Lassen wir jetzt $\triangle x = 0$ werden, dann erhalten wir den D. Q.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\triangle x = 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x = 0} \left(n \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot \triangle x + \ldots\ldots + (\triangle x)^{n-1} \right)$$

Also

$$\frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

Damit haben wir den D. Q. der Function $y = x^n$ gefunden, oder die Function x^n differenzirt. Als Resultat fanden wir:

Ist $y = x^n$, dann ist $y' = n \cdot x^{n-1}$

Beispiele:

$y = x^{10}$; dann ist $y' = 10 \cdot x^{10-1} = 10\, x^9$

$y = \frac{1}{x^6} = x^{-6}$, dann ist $y' = -6 \cdot x^{-6-1} = -6\, x^{-7}$

$$\text{also } y' = \frac{-6}{x^7}$$

$y = \sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$, dann ist $y' = \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}}$

$= \frac{5}{3} \sqrt[3]{x^2}$

$y = \frac{1}{\sqrt[7]{x^4}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{7}}} = x^{-\frac{4}{7}}$, dann ist $y' = -\frac{4}{7} x^{-\frac{4}{7}-1}$

$= -\frac{4}{7} x^{-\frac{11}{7}} = -\frac{4}{7\sqrt[7]{x^{11}}}$

Übungsaufgaben:

Die linksstehenden Functionen sind zu differenziren!

1) $y = x^5$ $\quad y' = 5\,x^4$
2) $y = x^4$ $\quad y' = 4\,x^3$
3) $y = x^2$ $\quad y' = 2\,x$
4) $y = x$ $\quad y' = 1$
5) $y = x^\alpha$ $\quad y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
6) $y = x^{n+1}$ $\quad y' = (n+1)\,x^n$
7) $y = x^{n+2}$ $\quad y' = (n+2)\,x^{n+1}$
8) $y = x^{n+2}$ $\quad y' = (n-1)\,x^{n-2}$
9) $y = x^{\sin\alpha}$ $\quad y' = \sin\alpha\, x^{\sin\alpha-1}$
10) $y = x^{\sin^2\alpha}$ $\quad y' = \frac{\sin^2\alpha \cdot}{x^{\cos\alpha}}$
11) $y = x^{\cos^2\alpha}$ $\quad y' = \frac{\cos^2\alpha}{x^{\sin^2\alpha}}$
12) $y = \frac{1}{x^{10}}$ $\quad y' = -\frac{10}{x^{11}}$
13) $y = \frac{1}{x^8}$ $\quad y' = -\frac{8}{x^9}$

14) $y = \frac{1}{x^6}$ $\quad y' = -\frac{6}{x^7}$

15) $y = \frac{1}{x^3}$ $\quad y' = -\frac{3}{x^4}$

16) $y = \frac{1}{x}$ $\quad y' = -\frac{1}{x^2}$

17) $y = \frac{1}{x^\beta}$ $\quad y' = -\beta\, x^{-\beta-1} = \frac{-\beta}{x^{\beta+1}}$

18) $y = \frac{1}{x^m}$ $\quad y' = -\frac{m}{x^{m+1}}$

19) $y = \frac{1}{x^{m-1}}$ $\quad y' = -\frac{m-1}{x^m}$

20) $y = \frac{1}{x^{m-2}}$ $\quad y'' = -\frac{m-2}{x^{m-1}}$

21) $y = \sqrt[4]{x}$ $\quad y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

22) $y = \sqrt[5]{x}$ $\quad y' = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

23) $y = \sqrt[9]{x}$ $\quad y' = \frac{1}{9\sqrt[9]{x^8}}$

24) $y = \sqrt{x}$ $\quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

25) $y = \sqrt[\alpha]{x}$ $\quad y' = \frac{1}{\alpha\sqrt[\alpha]{x^{\alpha-1}}}$

26) $y = \sqrt[m+1]{x^5}$ $\quad y' = \frac{1}{(m+1)\sqrt[m+1]{x^m}}$

27) $y = \sqrt[3]{x^5}$ $\quad y' = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

28) $y = \sqrt[4]{x^7}$ $\quad y' = \frac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}$

29) $y = \sqrt{x^9}$ $\quad y' = \frac{9}{2}\sqrt{x^7}$

30) $y = \sqrt{x^3}$ $\quad y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

31) $y = \sqrt[3]{x^4}$ $\quad y' = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

32) $y = \sqrt[5]{x^6}$ $\quad y' = \frac{6}{5}\sqrt[5]{x}$

33) $y = \sqrt[7]{x^9}$ $\quad y' = \frac{9}{7}\sqrt[7]{x^2}$

34) $y = \sqrt[9]{x^{11}}$ $\quad y' = \frac{11}{9}\sqrt[9]{x^2}$

35) $y = \sqrt[5]{x^7}$ $\quad y' = \frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$

36) $y = \sqrt[11]{x^9}$ $\quad y' = \frac{9}{11\sqrt[11]{x^2}}$

37) $y = \sqrt[7]{x^4}$ $\quad y' = \frac{4}{7\sqrt[7]{x^3}}$

38) $y = \sqrt[5]{x^2}$ $\quad y' = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

39) $y = \sqrt[10]{x^7}$ $\quad y' = \frac{7}{10\sqrt[10]{x^3}}$

40) $y = \sqrt[7]{x^5}$ $\quad y' = \frac{5}{7\sqrt[7]{x^2}}$

41) $y = \sqrt[3]{x}$ $\quad y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

42) $y = \sqrt[12]{x}$ $\quad y' = \frac{1}{12\sqrt[12]{x^{11}}}$

43) $y = \sqrt[p]{x^9}$ $\quad y' = \frac{9}{p} \cdot x^{\frac{9}{p}-1} = \frac{9}{p}\sqrt[p]{x^{9-p}}$

44) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad y' = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

45) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $\quad y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

46) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ $\quad y' = -\frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}$

47) $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$ $\quad y' = -\frac{1}{5\sqrt[5]{x^6}}$

48) $y = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$ $\quad y' = -\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n+1}}}$

49) $y = \frac{1}{\sqrt[n-1]{x}}$ $\quad y' = -\frac{1}{(n-1)\sqrt[n-1]{x^n}}$

50) $y = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ $\quad y' = -\frac{3}{2\sqrt{x^5}}$

51) $y = \frac{1}{\sqrt{x^5}}$ $\quad y' = -\frac{5}{2\sqrt{x^7}}$

52) $y = \frac{1}{\sqrt{x^9}}$ $\quad y' = -\frac{9}{2\sqrt{x^{11}}}$

53) $x = \frac{1}{\sqrt{x^\alpha}}$ $\quad y' = -\frac{\alpha}{2\sqrt{x^{\alpha+2}}}$

54) $y = \frac{1}{\sqrt{x^{\alpha-2}}}$ $\quad y' = -\frac{\alpha-2}{2\sqrt{x^\alpha}}$

55) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}$ $\quad y' = -\frac{7}{3 \cdot \sqrt[3]{x^{10}}}$

56) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$ $\quad y' = -\frac{5}{3\sqrt[3]{x^8}}$

57) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^9}}$ $\quad y' = -\frac{9}{4\sqrt[4]{x^{13}}}$

58) $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^{11}}}$ $\quad y' = -\frac{11}{5\sqrt[5]{x^{16}}}$

59) $y = \frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}$ $\quad y' = -\frac{2}{7\sqrt[7]{x^9}}$

60) $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$ $\quad y' = -\frac{3}{5\sqrt[5]{x^8}}$

61) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ $\quad y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$

62) $y = \frac{1}{\sqrt[10]{x^3}}$ $\quad y' = -\frac{3}{10\sqrt[10]{x^{13}}}$

63) $y = 1, (= x^0)$ $\quad y' = 0$

§ 16. Die Constante.

I. Eine beliebige Constante C kann man auch eine Function von x nennen; sie ist dann eben eine solche Function von x, welche für jeden Wert von x den gleichen Wert C besitzt. Wir wollen nun die so definierte Function $y = C$ differenzieren. Der Differenzenquotient ist:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{C - C}{\triangle x} = 0.$$

Der Differenzenquotient ist stets gleich 0, da der Zähler stets = C — C = 0 ist; also ist auch der Differentialquotient = 0. Wir gewinnen damit die Formel:

Ist $y = C$ (Constans), dann ist $y' = 0$.

Der D. Q. einer Constanten ist gleich 0.

II. Dieser Satz hat eine einfache geometrische Bedeutung: Die Function $y = C$ stellt in rechtwinkligen Coordinaten eine Parallele zur x-Axe dar im Abstand C. Eine Tangente in irgend einem Punkt der Geraden fällt aber mit der Geraden selber zusammen. Der Tangentwinkel τ ist also = 0 und daher muß auch

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = 0 \text{ sein.}$$

III. Nunmehr betrachten wir eine Function F (x), die aus einer anderen Function f (x) mal einem constanten Factor C besteht. Es sei also

$$y = F(x) = C \cdot f(x).$$

Der D. Q. dieser Function sei gesucht.

Der Differenzenquotient

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{F(x_1) - F(x)}{x_1 - x}$$

gewinnt, wenn man für F (x) seinen Wert $C \cdot f(x)$ setzt, die Gestalt:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{C f(x_1) - C f(x)}{x_1 - x} = C \cdot \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Der letztere Bruch ist aber der Differenzenquotient der Function f (x); lassen wir nun $x_1 = x$ werden,

dann gehen die Differenzenquotienten in die Differentialquotienten über und wir erhalten

$$\frac{dy}{dx} = C \cdot f'(x),$$

wobei $f'(x)$ den D. Q. der Function $f(x)$ bedeutet. Dies ergiebt die Regel:

Ist $y = C \cdot f(x)$, dann ist $y' = C \cdot f'(x)$.

Das heißt: Der D. Q. einer mit einer Constanten multiplizierten Function ist gleich dem D. Q. der Function mal der Constanten.

Zum Beispiel:

Ist $y = 10\,x^3$, dann ist $y' = 10 \cdot 3\,x^2 = 30\,x^2$

$y = 2\sqrt{x}$, „ „ $y' = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Übungsaufgaben:

Folgende Functionen sind zu differenzieren:

1) $y = 5\,x^3$ $\quad y' = 15\,x^2$
2) $y = 7\,x^4$ $\quad y' = 28\,x^3$
3) $y = 9\,x^7$ $\quad y' = 63\,x^6$
4) $y = \frac{1}{2}\,x^8$ $\quad y' = 4\,x^7$
5) $y = \frac{2}{3}\,x^9$ $\quad y' = 6\,x^8$
6) $y = \frac{4}{7}\,x^{14}$ $\quad y' = 8\,x^{13}$
7) $y = 2\,x$ $\quad y' = 2$
8) $y = 10$ $\quad y' = 0$
9) $y = \frac{5}{7}$ $\quad y' = 0$

10) $y = a \cdot x^4$	$y' = 4 a x^3$
11) $y = 3 a x^7$	$y' = 21 a x^6$
12) $y = \frac{a+b}{2} x^2$	$y' = (a+b) x$
13) $y = -x^7$	$y' = -7 x^6$
14) $y = -6 x^5$	$y' = -30 x^4$
15) $y = -\frac{\alpha}{2} x^6$	$y' = -3 \alpha \cdot x^5$
16) $y = -x$	$y' = -1$
17) $y = -5$	$y' = 0$
18) $y = \frac{2}{x^3} = 2 \cdot x^{-3}$	$y' = -\frac{6}{x^4}$
19) $y = \frac{4}{x^5}$	$y' = -\frac{20}{x^6}$
20) $y = \frac{3}{x^7}$	$y' = -\frac{21}{x^8}$
21) $y = \frac{10}{x}$	$y' = -\frac{10}{x^2}$
22) $y = \frac{a}{x}$	$y' = -\frac{a}{x^2}$
23) $y = -\frac{5}{x^4}$	$y' = \frac{20}{x^5}$
24) $y = -\frac{7}{x^2}$	$y' = \frac{14}{x^3}$
25) $y = -\frac{2}{3 x^6} = -\frac{2}{3} x^{-6}$	$y' = \frac{4}{x^7}$
26) $y = -\frac{5}{7 x^{21}}$	$y' = \frac{15}{x^{22}}$
27) $y = \frac{3}{4 x^5}$	$y' = -\frac{15}{4 x^6}$

28) $y = \frac{2}{9x^7}$ $y' = \frac{-14}{9x^8}$

29) $y = \frac{3}{8x}$ $y' = -\frac{3}{8x^2}$

30) $y = 2\sqrt{x^3}$ $y' = 3\sqrt{x}$

31) $y = 5\sqrt{x^5}$ $y' = \frac{25}{2}\sqrt{x^3}$

32) $y = 7\sqrt{x^9}$ $y' = \frac{63}{2}\sqrt{x^7}$

33) $y = \frac{1}{5}\sqrt{x^{15}}$ $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x^{13}}$

34) $y = -\frac{1}{4}\sqrt{x^3}$ $y' = -\frac{3}{8}\sqrt{x}$

35) $y = \frac{2}{3}\sqrt[3]{x}$ $y' = \frac{2}{9\sqrt[3]{x^2}}$

36) $y = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2}$ $y' = \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$

37) $y = \frac{2}{5}\sqrt[3]{x^4}$ $y' = -\frac{8}{15}\sqrt[3]{x}$

38) $y = -\sqrt{3}$ $y' = 0$

39) $y = \frac{4}{7}\sqrt[4]{x^5}$ $y' = \frac{5}{7}\sqrt[4]{x}$

40) $y = -\frac{6}{11}\sqrt[6]{x^7}$ $y' = -\frac{7}{11}\sqrt[6]{x}$

41) $y = -\frac{2}{5}\sqrt[7]{x^3}$ $y' = -\frac{6}{35\sqrt[7]{x^4}}$

42) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{31}$ $y' = 0$

43) $y = \frac{4}{9}\sqrt[4]{x^9}$ $\quad y' = \sqrt[4]{x^5}$

44) $y = \frac{14}{11}\sqrt[7]{x^{11}}$ $\quad y' = 2\sqrt[7]{x^4}$

45) $y = \frac{2}{5\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2}{5}x^{-\frac{2}{3}}$ $\quad y' = -\frac{4}{15\sqrt[3]{x^5}}$

46) $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad y' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$

47) $y = \frac{2}{7\sqrt[7]{x^4}}$ $\quad y' = -\frac{8}{49\sqrt[7]{x^{11}}}$

48) $y = -\frac{3}{8\sqrt[3]{x^8}}$ $\quad y' = \frac{1}{\sqrt[3]{x^{11}}}$

49) $y = -\frac{9}{15\sqrt[9]{x^{15}}}$ $\quad y' = \frac{1}{\sqrt[3]{y^8}}$

50) $y = \frac{2}{3\sqrt[3]{5}}$ $\quad y' = 0$

51) $y = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$ $\quad y' = -\frac{1}{9\sqrt[3]{x^4}}$

52) $y = \frac{10}{\sqrt[4]{x}}$ $\quad y' = -\frac{5}{2\sqrt[4]{x^5}}$

§ 17. Die algebraiſche Summe.

Aus mehreren Functionen $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$..... kann man eine Function $F(x)$ bilden, indem man dieſe Functionen zu einer algebraiſchen Summe vereinigt.

Dann ist also

$$y = F(x) = f(x) + g(x) + h(x) + \ldots.$$

Um nun den D. Q. der Function $F(x)$ zu finden, bilden wir zunächst den Differenzenquotienten

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{F(x_1) - F(x)}{x_1 - x}$$

Nun setzen wir für $F(x)$ den eigentlichen Wert und finden dann

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_1) + g(x_1) + h(x_1) - [f(x) + g(x) + h(x)}{x_1 - x}$$

oder, wenn wir die Reihenfolge im Zähler etwas ändern,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_1) - f(x) + g(x_1) - g(x) + h(x_1) - h(x)]}{x_1 - x}$$

oder

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} + \frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x} + \frac{h(x_1) - h(x)}{x_1 - x}$$

Die rechtsstehenden Brüche sind die Differenzenquotienten der Functionen

$$f(x) \ , \ g(x) \ , \ h(x).$$

Läßt man nun $x_1 = x$ werden, dann gehen sie in die entsprechenden Differentialquotienten über. Es wird daher:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) + g'(x) + h'(x) + \ldots\ldots$$

Dies ergiebt die Regel:

Ist $y = f(x) + g(x) + h(x) + \ldots\ldots$ dann ist

$$y' = f'(x) + g'(x) + h'(x) + \ldots\ldots$$

D. h. Der D. Q. einer Summe ist gleich der Summe der Differentialquotienten der einzelnen Summanden.

Übungsaufgaben.

Folgende Functionen sind zu differenzieren:

1) $y = x^3 + x^5 + \sqrt{x}$ $\quad y' = 3x^2 + 5x^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2) $y = 2x + 3x^2 - 4x^3 - 5$ $\quad y' = 2 + 6x - 12x^2$

3) $y = 1 - 4x + 16x^2 - 64x^3$ $\quad y' = -4 + 32x - 192x^2$

4) $y = a + bx - cx^2 + dx^6$ $\quad y' = b - 2cx + 6dx^5$

5) $y = \alpha + \beta x^3 - \gamma x^5 + \delta x^7$ $\quad y' = 3\beta x^2 - 5\gamma x^4 + 7\delta x^6$

6) $y = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8 - \frac{1x^9}{9}$ $\quad y' = x^6 - x^7 - x^8$

7) $y = x^2 + 4\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} - 10$ $\quad y' = 2x + \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2}$

8) $y = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4}$ $\quad y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4} + \frac{16}{x^5}$

9) $y = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{2\sqrt{x^3}}$ $\quad y' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} + \frac{9}{4\sqrt{x^5}}$

10) $y = \frac{5}{4\sqrt[5]{x^4}} + \frac{7}{8\sqrt[7]{x^8}}$ $\quad y' = -\frac{1}{\sqrt[5]{x^9}} - \frac{1}{\sqrt[7]{x^{15}}}$

11) $y = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ $\quad y' = 0$

12) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - \sqrt{x^3}$ $\quad y' = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x}$

13) $y = -\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}$ $\quad y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^3}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

14) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + x^4 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $\quad y' = 4x^3$

15) $y = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \frac{2}{x}$ $\quad y' = -\frac{2}{x^2}$

§ 18. Das Product.

I. Aus zwei Functionen $f(x)$ und $g(x)$ kann man eine neue Function $F(x)$ bilden, indem man $f(x)$ mit $g(x)$ multipliziert und das Resultat gleich $F(x)$ setzt. Also $y = F(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Um die Function $y = F(x)$ zu differenzieren, bilden wir zunächst den Differenzenquotienten:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{F(x_1) \quad F(x).}{x_1 - x}$$

Hierin setzen wir für $F(x)$ seinen eigentlichen Wert $f(x) \cdot g(x)$. Dann wird

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_1)\, g(x_1) - f(x) \cdot g(x)}{x_1 - x}$$

Diesen Bruch wollen wir dadurch umformen, daß wir im Zähler die Größe $f(x_1) \cdot g(x)$ addieren und subtrahieren, wodurch sich natürlich der Wert des Ausdrucks nicht ändern kann. Es ist aber dann

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_1) \cdot g(x_1) - f(x_1) \cdot g(x) + f(x_1) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{x_1 - x}$$

oder

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_1)\,[g(x_1) - g(x)] + g(x)\,[f(x_1) - f(x)]}{x_1 - x}$$

oder endlich

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = f(x_1) \cdot \frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x} + g(x) \cdot \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Die auf der rechten Seite stehenden Brüche sind die Differenzenquotienten der Functionen $g(x)$ und $f(x)$. Gehen wir nun zur Grenze über, indem wir $x_1 = x$ setzen, dann gehen die Differenzenquotienten in die Differentialquotienten über und es wird also:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x).$$

Führt man für f(x) den Buchstaben u, für g (x) den Buchstaben v ein, dann erhalten wir die Regel:

Ist $y = u.\ v.$ dann ist $y' = u.\ v' + v.\ u'$

D. h. Der D. Q. eines Produkts ist gleich dem ersten Factor mal dem D. Q. des zweiten, plus dem zweiten Factor mal dem D. Q. des ersten.

Übungsaufgaben.

1) $y=(x^3+1)(x^2-2x+1)$ $y'=(x^3+1)\cdot(2x-2)+(x^2-2x+1)\cdot(3x^2)$
$y'=5x^4-8x^3+3x^2+2x-2$

2) $y=(1+2x+3x^2)(1-2x-5x^4)$
$y'=-90x^5-50x^4-20x^3-18x^2-2x$

3) $y=(x^4-1)(x^4+1)$ $y'=8x^7$

4) $y=\left(x^{10}-\frac{1}{x}\right)\left(x^{10}+\frac{1}{x}\right)$ $y'=20x^{19}+\frac{2}{x^3}$

5) $y=(x+\sqrt{x})(x^2-\sqrt[3]{x})$
$y'=3x^2+\frac{5}{2}\sqrt{x^3}-\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}-\frac{5}{6\sqrt[6]{x}}$

6) $y=x^4(a+b\sqrt{x})$ $y'=4ax^3+\frac{9}{2}bx^3\sqrt{x}$

7) $y=x^n(1-\alpha x)$ $y'=nx^{n-1}-\alpha(n+1)x^n$

8) $y=\sqrt[3]{x^5}(5-2x^3+3x^5)$
$y'=\frac{25}{3}\sqrt[3]{x^2}-\frac{28}{3}\sqrt[3]{x^{11}}+20\sqrt[3]{x^{17}}$

$$= \sqrt[3]{x^2}\left(\frac{25}{3} - \frac{28}{3}x^3 + 20x^5\right)$$

9) $y = \left(\sqrt[3]{x^5} - 1\right)\left(\sqrt[4]{x^7} - 1\right)$

$$y' = \frac{41}{12}\sqrt[12]{x^{29}} - \frac{7}{4}\sqrt[4]{x^3} - \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

10) $y = (\alpha + \beta\sqrt{x})(\gamma + \delta\sqrt{x})$ $y' = \frac{\beta\gamma + \alpha\delta}{2\sqrt{x}} + \beta\delta$

11) $y = x^n \cdot f(x)$ $y' = x^n f'(x) + f(x) \cdot nx^{n-1}$

12) $y = (1 + \alpha)(1 - \alpha)$ $y' = 0$

13) $y = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$

$$y' = \frac{7}{12}\left(\frac{1}{\sqrt[12]{x^5}} - \frac{1}{\sqrt[12]{x^{19}}}\right)$$

§ 19. Der Quotient.

Aus den beiden Functionen f (x) und g (x) läßt sich durch Division die neue Function bilden $\frac{f(x)}{g(x)}$, die wir wieder mit F (x) bezeichnen wollen. Um die so entstandene Function $y = F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ zu differenziren, haben wir

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{F(x_1) - F(x)}{x_1 - x} = \frac{\frac{f(x_1)}{g(x_1)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{x_1 - x}$$

oder $$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_1) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x_1)}{(x_1 - x)\, g(x_1) \cdot g(x)}$$

Wir werden diesen Ausdruck in der Weise umformen, daß wir im Zähler die Größe f (x) · g (x)

addiren und subtrahiren. Dann wird $\frac{\triangle y}{\triangle x} =$

$$\frac{f(x_1) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x_1)}{(x_1 - x) \cdot g(x_1) \cdot g(x)}$$

oder $$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{g(x) \cdot [f(x_1) - f(x] - f(x)[g(x_1) - g(x)]}{(x_1 - x)\, g(x_1) \cdot g(x)}$$

oder endlich $$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{g(x) \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} - f(x) \frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x}}{g(x_1) \cdot g(x)}$$

Die beiden im Zähler stehenden Brüche sind die Differenzenquotienten der Functionen $f(x)$ und $g(x)$. Gehen wir nun zur Grenze über, indem wir $x_1 = x$ werden lassen, dann finden wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Setzen wir wieder $f(x) = u$, $g(x) = v$, dann finden wir folgende Regel:

Ist $y = \frac{u}{v}$ dann ist

$$y' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$$

D. h. Der D. Q. eines Bruches ist gleich dem Nenner mal dem D. Q. des Zählers, minus dem Zähler mal dem D. Q. des Nenners, dividirt durch das Quadrat des Nenners.

Übungsaufgaben:

1) $y = \frac{x^3+1}{x^2-1}$ $\qquad y' = \frac{(x^2-1) \cdot 3x^2 - (x^3+1) \cdot 2x}{(x^2-1)^2}$

$$= \frac{x^4-3x^2-2x}{(x^2-1)^2}$$

2) $y=\frac{1+2x+x^2}{1-x^3}$ $\quad y'=\frac{x^4+4x^3+3x^2+2x+2}{(1-x^3)^2}$

3) $y=\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$ $\quad y'=\frac{4x(x-3)}{(x^2+2x-3)^2}$

4) $y=\frac{2x^2-1}{2-x^2}$ $\quad y'=\frac{6x}{(2-x^2)^2}$

5) $y=\frac{1-x^3}{1+x^3}$ $\quad y'=\frac{-6x^2}{(1+x^3)^2}$

6) $y=\frac{1+x^4}{1-x^4}$ $\quad y'=\frac{8x^3}{(1-x^4)^2}$

7) $y=\frac{1-x}{1+x}$ $\quad y'=\frac{-2}{1+x)^2}$

8) $y=\frac{2-3x^2+x^3}{2+3x^2-x^3}$ $\quad y'=\frac{12(x^2-2x)}{(2+3x^2-x^3)^2}$

9) $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ $\quad y'=\frac{1}{\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})^2}$

10) $y=\frac{2x^3}{1+\sqrt[3]{x}}$ $\quad y'=\frac{2x^2(3+3\sqrt[3]{x}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{x})}{(1+\sqrt[3]{x})^2}$

11) $y=\frac{1}{a+bx}$ $\quad y'=\frac{-b}{(a+bx)^2}$

12) $y=\frac{1}{1+x}$ $\quad y'=-\frac{1}{(1+x)^2}$

13) $y=\frac{1}{f(x)}$ $\quad y'=-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$

14) $y = \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}$ $\quad y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x})^2}$

15) $y = \frac{-10}{1+2x-x^4}$ $\quad y' = \frac{10(2-4x^3)}{(1+2x-x^4)^2}$

§ 20. Mittelbare Functionen.

I. Ist u eine Function von x, und y eine Function von u, dann ist stets auch y eine Function von x; und zwar heißt y in diesem Falle: „Function einer Function" oder „mittelbare Function von x." Ist beispielsweise

$$y = \varphi(u) \text{ und } u = f(x),$$

dann ist $y = \varphi[f(x)]$, also eine Function von x. Ist ebenso $y = u^2$ und $u = (2x + 3)$, dann ist

$$y = (2x + 3)^2$$

Ist ebenso $y = u^5$ und $u = \sin x$, dann ist

$$y = (\sin x)^5$$

Ist ebenso $y = \log u$ und $u = \operatorname{arctg} x$, dann ist

$$y = \log(\operatorname{arctg} x).$$

u. s. w.

Um eine solche mittelbare Function von x,

$y = \varphi[f(x)]$, zu differenziren, zerlege man sie wieder in ihre Teilfunctionen

$y = \varphi(u)$ und $u = f(x)$ und bilde die Differenzenquotienten dieser Functionen

$$\frac{\triangle y}{\triangle u} \text{ und } \frac{\triangle u}{\triangle x}$$

Will man nun den Differenzenquotienten $\frac{\triangle y}{\triangle x}$, dann braucht man nur das Product der beiden anderen Differenzenquotienten zu bilden. Es ist in der That:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle y}{\triangle u} \cdot \frac{\triangle u}{\triangle x};$$

und geht man nun zur Grenze über, indem man $\triangle x$ gleich 0 werden läßt, dann wird im Allgemeinen auch $\triangle u$ und $\triangle y$ gleich 0 werden; d. h. die Differenzenquotienten gehen in die Differentialquotienten über. Es wird also $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ oder

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(u) \cdot f'(x).$$

Oder wenn man $f'(x) = u'$ setzt

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(u) \cdot u'.$$

Dies ergiebt folgende Regel:

> Ist $y = \varphi\,[f(x)]$ eine mittelbare Function von x, so differenzire man $y = \varphi$ so, als ob $f(x)$ die Variable wäre — man setzt in Gedanken statt $f(x)$ den Wert u — und multiplizire den so erhaltenen D. Q. noch mit dem Differentialquotienten von $f(x)$.

II. Beispiele. 1). $y = (x^3 + x^2 + 1)^3$

Hier haben wir eine mittelbare Function von x. (Aus x wurde zunächst die Function gebildet $u = f(x) = x^3 + x^2 + 1$ und aus dieser die Function $y = u^3 = (x^3 + x^2 + 1)^3$).

Um den Ausdruck $y = (x^3 + x^2 + 1)^3$ zu differenziren, denken wir uns, der Klammerausdruck sei die eigentliche Veränderliche und setzen ihn gleich u; dann wird $y' = 3\,u^2$ und nun multiplizieren wir diesen Ausdruck noch mit dem D. Q. des Klammer-

ausdrucks, also mit $u' = 3x^2 + 2x$. Es wird also
$y' = 3u^2 u' = 3(x^3 + x^2 + 1)^2 \cdot (3x^2 + 2x)$

2) $$y = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x})^5$$

Hier ist $u = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x})$

und $$u' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

Es wird also $y = u^5$ und $u = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x})$,
Daher wird $y' = 5 \cdot u^4 \cdot u'$

oder $$y' = 5(\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x})^4 \cdot \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\right)$$

3) $$y = \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Hier ist $u = 1 - x^2$ und $y = u^{\frac{1}{2}}$

Also $$y' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot u'$$

oder $$y' = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

oder $$y' = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

4) $$y = \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)^6$$

Hier ist $$\frac{1 - x^2}{1 + x^2} = u$$

also

$$u' = \frac{(1+x)(-2x) - (1-x^2)(2x)}{(1 + x^2)^2} = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

Es wird dann

$$y = u^6$$

$$y' = 6 \cdot u^5 \cdot u'$$

$$y' = 6 \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^5 \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

III. Ist y wieder eine Function von u, und u eine Function von v, und erst v eine Function von x, dann heißt wieder y eine mittelbare Function von x. Ist z. B. $y = u^3$, $u = \cos v$, $v = (1+x)$ dann wird $u = \cos(1+x)$ also

$$y = [\cos(1+x)]^3$$

In dieser Weise kann man noch mehr Functionen aneinander reihen, wie die folgenden Beispiele zeigen:

1) $y = \frac{2}{5}u$, $u = \sqrt{1+v}$ $v = \frac{1-w}{1+w}$ $w = \sqrt[3]{x}$

Um y als Function von x darzustellen, setzen wir hier:

$$v = \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$$

$$u = \sqrt{1+\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}$$

endlich $y = \frac{2}{5}\sqrt{1+\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}$

2) $y = \log u$, $u = 2^{aw+b}$, $w = x^4+1$

Hier wird $w = (x^4+1)$

$$u = 2^{a(x^4+1)+b}$$

$$y = \log 2^{a(x^4+1)+b}$$

Es ist leicht zu sehen, daß eine solche aus mehreren Functionen zusammengesetzte mittelbare Function in ganz entsprechender Weise differenzirt wird, wie eine aus 2 Functionen zusammengesetzte.

Ist z. B. $y = F(\varphi(f(x)))$,
d. h. ist F eine Function von $\varphi(f(x))$
φ " " von $f(x)$
und f " " von x
dann setze man zunächst $\varphi(f(x)) = u$

Also $y = F(u)$

Daher: $y' = F'(u) \cdot u'$

Um u' zu finden, setzen wir $f(x) = v$
dann ist $u = \varphi(f(x)) = \varphi v)$
$u' = \varphi'(v) \cdot v' = \varphi'(v) \cdot f'(x)$

Also endlich
$y' = F'(u) \cdot \varphi'(v) \cdot f'(x)$

Beispiele: $y = ((1 + 3x^2)^5 + 1)^3$

Hier wird: $(1 + 3x^2)^5 + 1 = u$
$1 + 3x^2 = v$

Also $y = u^3$
$u = 1 + v^5$
$v = 1 + 3x^2$

Daher wird: $y' = 3u^2 \cdot u'$
$u' = 5v^4 v'$
$v' = 6x$

Also $y' = 3u^2 \cdot 5v^4 \cdot v'$,
$y' = 3[(1 + 3x^2)^5 + 1]^2 \cdot 5(1 + 3x^2)^4 \cdot 6x$

§ 21. Übungsaufgaben zu § 20.

1) $y = (2 + 5x^4)^3$ $\quad y' = 3(2 + 5x^4)^2 \cdot 5 \cdot 4x^3$
$y' = 60(2 + 5x^4)^2 \cdot x^3$

2) $y = (3 - 7x)^4$ $\quad y' = -28(3 - 7x)^3$

3) $y=(\alpha+\beta x)^3$ $\quad y'=3\beta(\alpha+\beta x)^2$

4) $y=(10-x^2)^2$ $\quad y'=-2(10-x^2)\cdot x$

5) $y=(x^4-x^3+1)^4$ $\quad y'=4(x^4-x^3+1)^3(4x^3-3x^2)$

6) $y=(2x-7x^2+5)^3$ $\quad y'=3(2x-7x^2+5)^2(2-14x)$

7) $y=(a+bx)^n$ $\quad y'=nb(a+bx)^{n-1}$

8) $y=(a+bx^2)^n$ $\quad y'=2nbx(a+bx^2)^{n-1}$

9) $y=(a+bx^3)^n$ $\quad y'=3nbx^2(a+bx^3)^{n-1}$

10) $y=(a+bx^p)^n$ $\quad y'=npbx^{p-1}(a+bx^p)^{n-1}$

11) $y=(1-3x+5x^2)^n$

$$y'=n(1-3x+5x^2)^{n-1}(-3+10x)$$

12) $y=(\alpha+\beta x-\gamma x^3)^4$

$$y'=4(\alpha+\beta x-\gamma x^3)^3(\beta-3\gamma x^2)$$

13) $y=\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^2$ $\quad y'=2\left(1+\frac{1}{x^3}\right)\cdot\left(\frac{-3}{x^4}\right)$

14) $y=\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)^4$

$$y'=4\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$$

15) $y=\left(x^4-\frac{1}{x^3}\right)^7$

$$y'=7\left(x^4-\frac{1}{x^3}\right)^6\cdot\left(4x^3+\frac{3}{x^4}\right)$$

16) $y=\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^3$

$$y'=3\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^2\cdot\left(3x-\frac{2}{x^3}\right)$$

17) $y=\left(\frac{2}{3}x^6-\frac{4}{5x^5}\right)^5$

$$y'=5\left(\frac{2}{3}x^6-\frac{4}{5x^5}\right)^4\left(4x^5+\frac{4}{x^6}\right)$$

18) $y=\left(\frac{1}{x}-\frac{10}{x^5}+\frac{10}{11x^6}\right)^2$

$$y'=2\left(\frac{1}{x}-\frac{10}{x^5}-\frac{10}{11x^6}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{50}{x^6}-\frac{60}{11x^7}\right)$$

19) $y=\left(1-\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^5}\right)^4$

$$y'=4\left(1-\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^5}\right)^3\cdot\left(\frac{6}{x^4}+\frac{15}{x^6}\right)$$

20) $y=\left(\alpha+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}\right)^n$

$$y'=n\left(\alpha+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}\right)^{n-1}\left(-\frac{\beta}{x^2}-\frac{2\gamma}{x^3}\right)$$

21) $y=(\sqrt{x}+1)^2$

$$y'=2(\sqrt{x}+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

22) $y=(\sqrt{x}-1)^3$ $\qquad y'=\frac{3(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}}$

23) $y=(\sqrt{x}+\alpha)^5$ $\qquad y'=\frac{5(\sqrt{x}+\alpha)^4}{2\sqrt{x}}$

24) $y=(\sqrt[3]{x}-1)^3$ $\qquad y'=\frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2}{\sqrt[3]{x^2}}$

25) $y=(\sqrt[3]{x}+\alpha)^n$ $\qquad y'=\frac{n(\sqrt[3]{x}+\alpha)^{n-1}}{3\sqrt[3]{x^2}}$

26) $y=(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})^2$

$$y'=2(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

27) $y=(\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x})^3$

$$y'=3(\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x})^2\left(\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}+\frac{1}{5\sqrt[5]{x^3}}\right)$$

28) $y=(3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x})^4$

$$y'=4(3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x})^3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}\right)$$

29) $y=\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}-\frac{7}{5}\sqrt[7]{x^5}\right)^2$

$$y'=2\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}-\frac{7}{5}\sqrt[7]{x^5}\right)\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}\right)$$

30) $y=(x-\sqrt{x}+1)^4$

$$y'=4(x-\sqrt{x}+1)^3\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

31) $y=(x^3+\sqrt[3]{x^4}-1)^3$

$$y'=3(x^3+\sqrt[3]{x^4}-1)^2\left(3x^2+\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}\right)$$

32) $y=(x^5-\sqrt[7]{x^9}-10)^5$

$$y'=5(x^5-\sqrt[7]{x^9}-10)^4\left(5x^4-\frac{9}{7}\sqrt[7]{x^2}\right)$$

33) $y=\left(\frac{1}{x}-\sqrt{x^5}\right)^{10}$

$$y'=10\left(\frac{1}{x}-\sqrt{x^5}\right)^9\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{5}{2}\sqrt{x^3}\right)$$

34) $y=\left(\frac{4}{7x^7}-6\sqrt[6]{x}\right)^3$

$$y'=3\left(\frac{4}{7x7}-6\sqrt[6]{x}\right)^2\left(-\frac{4}{x^8}+\frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}\right)$$

35) $y=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)^3 \qquad y'=3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)^2\left(-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)$

36) $y=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-1\right)^2 \qquad y'=-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-1\right)\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

37) $y=\left(\frac{4}{3\sqrt[4]{x^3}}-1\right)^2 \qquad y'=-2\left(\frac{4}{3\sqrt[4]{x^3}}-1\right)\frac{1}{\sqrt[4]{x^7}}$

38) $y=\left(x^3+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x^2}\right)^5$

$$y'=5\left(x^3+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x^2}\right)^4\left(3x^2-\frac{1}{\sqrt{x^3}}+\frac{6}{x^3}\right)$$

39) $y=\left(\frac{x^5}{5}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2x^2}\right)^3$

$$y'=3\left(\frac{x^5}{5}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2x^2}\right)^2\left(x^4+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x^3}\right)$$

40) $y=\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{5}}+1\right)^3 \qquad y'=0$

41) $y=\frac{1}{(2x-3x^2+1)^4}$

$=(2x-3x^2+1)^{-4}$

$$y'=-4(2x-3x^2+1)^{-5}\cdot(2-6x)$$

$$y'=\frac{-8(1-3x)}{(2x-3x^2+1)^5}$$

42) $y=\frac{1}{(2-3x^2)^3}$ $y'=\frac{18x}{(2-3x^2)^4}$

43) $y=\frac{1}{(\alpha+\beta x^3)^n}$ $y'=\frac{-3n\beta x^2}{(\alpha+\beta x^3)^{n+1}}$

44) $y=\frac{1}{\alpha+\beta x}$ $y'=\frac{-\beta}{(\alpha+\beta x)^2}$

45) $y=\frac{1}{(\alpha+\beta x)^2}$ $y'=\frac{-2\beta}{(\alpha+\beta x)^3}$

46) $y=\frac{1}{(\alpha+\beta x)^3}$ $y'=\frac{-3\beta}{(\alpha+\beta x)^4}$

47) $y=\frac{1}{(\alpha+\beta x)^n}$ $y'=\frac{-n\beta}{(\alpha+\beta x)^{n+1}}$

48) $y=\frac{1}{(a-\beta x)^n}$ $y'=\frac{n\beta}{(\alpha+\beta x)^{n+1}}$

49) $y=\frac{1}{(4+7x^3-8x^4)^3}$ $y'=\frac{-3(21x^2-32x^3)}{(4+7x^3-8x^4)^4}$

50) $y=\frac{1}{(7-5x+x^6)^4}$ $y'=\frac{-4(-5+6x^5)}{(7-5x+x^6)^5}$

51) $y=\frac{-10}{\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-1\right)^n}$ $y'=\frac{10n(x^3-x^2+x)}{\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-1\right)^{n+1}}$

52) $y=x^3+(1-x^2)^5$ $y'=3x^2-10(1-x^2)^4\cdot x$

53) $y=\frac{2}{x^3}-\left(1-\sqrt[5]{x}\right)^2$ $y'=-\frac{6}{x^4}+\frac{2}{5}\frac{(1-\sqrt[5]{x})}{\sqrt[5]{x^4}}$

54) $y=\frac{4}{\sqrt[4]{x}}+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^3$ $y'=\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}-\frac{6\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}{x^3}$

55) $y=\sqrt[4]{x^7}-(\alpha+\beta)^4$ $\quad y'=\frac{7\sqrt[4]{x^3}}{4}$

56) $y=\sqrt{f(x)}=[f(x)]^{\frac{1}{2}}$ $\quad y'=\frac{1}{2}[f(x)]^{-\frac{1}{2}}\cdot f'(x)$

$$y'=\frac{f'(x)}{2[f(x)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$y'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

(Dieſes Reſultat kann folgendermaßen ausgeſprochen werden: Der Differentialquotient einer Quadratwurzel iſt ein Bruch, in deſſen Nenner die doppelte Wurzel, in deſſen Zähler der Differential-Quotient des Radicanten ſteht.)

57) $y=\sqrt{1+x^3}$ $\quad y'=\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$

58) $y=\sqrt{\alpha x+\beta}$ $\quad y'=\frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha x+\beta}}$

59) $y=\sqrt{2px}$ $\quad y'=\frac{p}{\sqrt{2px}}$

60) $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ $\quad y'=\frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$

61) $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ $\quad y'=\frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}$

62) $y=\sqrt{3x-5x^3}$ $\quad y'=\frac{3-15x^2}{2\sqrt{3x-5x^3}}$

63) $y=\sqrt{x^4+x^2-1}$ $\quad y'=\frac{2x^3+x}{\sqrt{x^4+x^2-1}}$

64) $y=\sqrt{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}$ $\quad y'=\frac{3\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{2\sqrt{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}$

65) $y=10+\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}$ $y'=-\frac{1}{2\sqrt{2-x}}-\frac{1}{2\sqrt{2+x}}$

66) $y=x^2.\sqrt{1+x^2}$ $(=u.v)$ $y'=x^2\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}+\sqrt{1+x^2}.2x$

$$y'=\frac{x^3+(1+x^2)2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y'=\frac{3x^3+2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

67) $y=(5+x)\sqrt{5-x}$ $y'=\frac{5-3x}{2\sqrt{5-3x}}$

68) $y=x\sqrt{1+x}$ $y'=\frac{2+3x}{2\sqrt{1+x}}$

69) $y=2x^2\sqrt{10-x}$ $y'=\frac{5(8x-x^2)}{\sqrt{10-x}}$

70) $y=\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$ $y'=\frac{1-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$

71) $y=\frac{1}{x}.\sqrt{1+x^2}$ $y'=\frac{-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

72) $y=\frac{1}{x}.\sqrt{\alpha+\beta x}$ $y'=-\frac{2\alpha+\beta x}{2x^2\sqrt{\alpha+\beta x}}$

73) $y=\sqrt[3]{\alpha+\beta x}=(\alpha+\beta x)^{\frac{1}{3}}$ $y'=\frac{\beta}{3\sqrt[3]{(\alpha+\beta x)^2}}$

74) $y=\sqrt[3]{1-x^2}$ $y'=\frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$

75) $y=\sqrt[3]{1+x^2+x^3}$ $\quad y'=\dfrac{2x+3x^2}{3\sqrt[3]{(1+x^2+x^3)^2}}$

76) $y=\sqrt[4]{\alpha-\beta x}$ $\quad y'=-\dfrac{\beta}{4\sqrt[4]{(\alpha-\beta x)^3}}$

77) $y=\sqrt[4]{2x-3x^5}$ $\quad y'=\dfrac{2-15x^4}{4\sqrt[4]{(2x-3x^5)^3}}$

78) $y=\sqrt[n]{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$ $\quad y'=\dfrac{\beta+2\gamma x}{n\sqrt[n]{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{n-1}}}$

79) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha+\beta x}}=(\alpha+\beta x)^{-\frac{1}{2}}$ $\quad y'=-\dfrac{\beta}{2\sqrt{(\alpha+\beta x)^3}}$

80) $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=$ $\quad y'=\dfrac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

81) $y=\dfrac{1}{\sqrt{10x-x^2}}=$ $\quad y'=\dfrac{x-5}{\sqrt{(10x-x^2)^3}}$

82) $y=\dfrac{1}{4\sqrt[3]{(2-x^3)^4}}$ $\quad y'=\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(2-x^3)^7}}$

83) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(\alpha+\beta x)^5}}$ $\quad y'=\dfrac{-5\beta}{3\sqrt[3]{(\alpha+\beta x)^8}}$

84) $y=\dfrac{4}{3\sqrt[4]{(x-1)^3}}$ $\quad y'=\dfrac{-1}{\sqrt[4]{(x-1)^7}}$

85) $y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{(1+x)^4}}$ $\quad y'=\dfrac{-4}{5\sqrt[5]{(1+x)^9}}$

86) $y=\frac{1}{\sqrt[n]{(\alpha+\beta x)^m}}$ $\quad y'=\frac{-m\beta}{n\sqrt[n]{(\alpha+\beta x)^{n+m}}}$

§ 22. Übungsaufgaben zu §§ 15—20.

1) $y=x^2(1-x)^5$

$y'=-5x^2(1-x)^4+2x(1-x)^5$

$=(1-x^4)(2x-7x^2)$

2) $y=x^3(5-6x^2)^3$ $\quad y'=3x^2(5-6x^2)^2(5-18x^2)$

3) $y=x(1-x)^2$ $\quad y'=1-4x+3x^2$

4) $y=(1-x)^3(1+x)^4$

$y'=4(1-x)^3(1+x)^3-(1-x)^2(1+x)^4$

5) $y=(x^2-1)^4(x^2+1)^5$

$y'=10(x^2-1)^4(x^2+1)^4\cdot x+8(x^2-1)^3(x^2+1)^5\cdot x$

6) $y=(x^3+5)(x^3-\alpha x^2+\beta)^2$

$y'=2(x^3+5)(3x^2-2\alpha x)(x^3-\alpha x^2+\beta)$

$+3(x^3-\alpha x^2+\beta)^2 x^2$

7) $y=\frac{(1+x^2)^3}{(1-x^3)^2}$ $\quad y'=\frac{6x(1+x^2)^2(1+x)}{(1-x^3)^3}$

8) $y=\frac{(1-x)^3}{(1+x)^4}$

$y'=-\frac{3(1+x)^4(1-x)^2-4(1-x)^3(1+x)^3}{1+x)^8}$

$y'=-\frac{(1-x)^2(7-x)}{(1+x)^5}$

9) $y=\frac{x-4}{(x^2+1)^2}$ $\quad y'=\frac{1+16x-3x^2}{(x^2+1)^3}$

10) $y=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$

$$y'=\frac{\sqrt{1+x}\cdot 1-x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}$$

$$y'=\frac{2(1+x)\quad x}{2\sqrt{1+x}\cdot(1+x)}$$

$$y'=\frac{2+x}{2\sqrt{(1+x)^3}}$$

11) $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ $\qquad y'=\frac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^2\sqrt{1+x}}$

12) $y=\sqrt{\frac{2+3x}{2-3x}}$ $\qquad y'=\frac{6\sqrt{2-3x}}{(2-3x)^2\sqrt{2+3x}}$

13) $y=\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$ $\qquad y'=\frac{-(x^2+4)}{2\sqrt{x(x^2-4)^3}}$

14) $y=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad y'=\frac{2x-x^3}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

15) $y=(x+\sqrt{1+x})^2$

$$y'=\frac{(2+3x+(2x+1)\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}$$

16) $y=\frac{\sqrt{a+x}}{ax+x^2}$ $\qquad y'=-\frac{3x+2a}{2x^2\sqrt{(a+x)^3}}$

17) $y=\frac{x}{\sqrt{(1-4x^2)}}$ $\qquad y'=\frac{1}{\sqrt{(1-4x^2)^3}}$

§ 23. Der Differentialquotient als Richtungsconstante.

I. Wir haben im § 13 gesehen, daß der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}=f'(x)$, geometrisch betrachtet, den

Tangens des Winkels τ bedeutet, den die Tangente im Punkt P (x, y) mit der positiven Richtung der x-Axe bildet. Haben wir daher irgend einen anderen Punkt P_1 der Curve mit den Cordinaten x_1, y_1, so ist der zugehörige Tangentenwinkel τ_1 zu bestimmen aus der Gleichung $\operatorname{tg}\tau_1 = f'(x_1)$

$f'(x_1)$ bedeutet dabei den Wert von $f'(x)$, den man erhält, wenn man an Stelle von x den gegebenen Wert x_1 einsetzt.

II. Wir sind nun im Stande, die folgende Aufgabe zu lösen:

Gegeben ist eine Curve durch ihre Gleichung $y = f(x)$. Gesucht ist die Tangente an die Curve in dem zur Abscisse x_1 gehörigen Curvenpunkt.

Die Gleichung einer Geraden, die durch den Punkt P_1 (x_1, y_1) geht und mit der x-Axe den Winkel τ_1 bildet, lautet bekanntlich

$$y - y_1 = \operatorname{tg}\tau_1 (x - x_1)$$

Hierin ist nun die Richtungsconstante

$$\operatorname{tg}\tau_1 = f'(x_1).$$

Also lautet die verlangte Gleichung

$$\underline{\underline{y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1).}}$$

III. Um die Gleichung der Normalen im Punkt P_1 (x_1, y_1) zu finden, müssen wir in Betracht ziehen, daß die Normale auf der Tangente senkrecht steht. Also ist ihre Richtungsconstante gleich dem negativ reciproken Wert von $f'(x_1)$, also gleich $-\frac{1}{f'(x_1)}$. Die Gleichung der Normalen lautet daher:

$$\underline{\underline{y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)}}$$

IV. Beispiel: Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkt P_1 an die Curve $y = x^3 + 1$?

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 = \operatorname{tg}\tau \quad \text{Also}$$

$$\operatorname{tg}\tau_1 = 3x_1^2$$

Also lautet die Tangentengleichung:

$$y - y_1 = 3\,x_1^{\,2}\,(x - x_1),$$

Die Normalengleichung dagegen:

$$y - y_1 = -\frac{1}{3\,x_1^{\,2}}\,(x - x_1)$$

Ist beispielsweise $x_1 = 2$, also $y_1 = 2^3 + 1 = 9$ dann lauten die beiden Gleichungen:

$$y - 9 = 3 \cdot 4\,(x - 2)$$

und $y - 9 = -\frac{1}{3 \cdot 4}\,(x-2)$ oder vereinfacht

$$y = 12\,x - 15$$

und $y = -\frac{1}{12}\,x + \frac{55}{6}$

Übungsaufgaben:

1. Welches ist die Gleichung der Tangente im Punkt P_1 der Paratel $y^2 = 2\,p\,x$ oder was dasselbe

$$y = \sqrt{2\,p\,x}\ ?$$

Antw.: $y - y_1 = \frac{p}{\sqrt{2\,p\,x_1}}\,(x - x_1)$ oder

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}\,(x - x_1)$$

2. Welches ist die Gleichung der Tangente im Punkt P_1 der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ oder } y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\ ?$$

Antw.: $y - y_1 = \frac{b\,x_1}{a\sqrt{a^2 - x_1^2}}(x - x_1)$.

3. Welches ist die Gleichung der Tangente im Punkt P_1 an den Kreis

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ oder } y = \sqrt{r^2 - x^2}?$$

Antw.: $y - y_1 = \frac{-x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}}(x - x_1)$

oder: $y - y_1 = \frac{-x_1}{y_1}(x - x_1)$

4. Welches ist die Gleichung der Tangente im Punkt P_1 des Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$?

Antw.: $y - y_1 = \frac{b\,x_1}{a\sqrt{x_1^2 - a^2}}(x - x_1)$.

5. Wie lautet in den Aufg. 1—4 die Gleichung der Normalen?

6. Wie lauten die Gleichungen von Tangente und Normale bei der semicubischen Parabel $y^2 = 3\,x^3$ für den Punkt $x_1 = 3$

$$\text{Antw.: } y = \frac{9}{2}x - \frac{9}{2}$$

$$\text{und } y = -\frac{2}{9}y + \frac{2\,9}{3}$$

7. Ebenso bei der gleichseitigen Hyp. $y = \frac{1}{x}$ im Punkt $x_1 = 4$

$$\text{Antw. } y = -\frac{1}{16}x + \frac{1}{2}$$

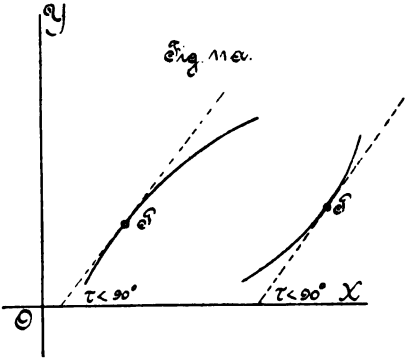
$$\text{und } y = 16\,x - 63\,\frac{3}{4}$$

§ 24. Das Steigen und Fallen der Curven.

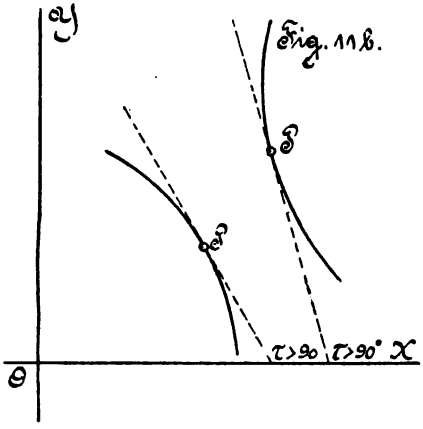
I. Wenn eine Curve (vgl. Fig. 11a) im Punkte P im Steigen begriffen ist, dann ist der Tangentenwinkel τ ein spitzer Winkel; ist sie dagegen im Fallen begriffen, dann ist τ ein stumpfer Winkel (Fig. 11b). Im ersten Fall ist $\operatorname{tg} \tau$ positiv, im zweiten Fall ist $\operatorname{tg} \tau$ negativ.

Da nun stets $\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ ist, so kann man folgende Regel aufstellen:

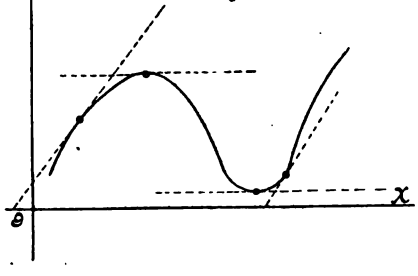
> So lange der D. Q. positiv ist, steigt die Function; so lange er negativ ist, fällt die Function.



II. Wenn eine Curve, die aus einem ununterbrochenen Linienzug besteht (eine sogenannte stetige Curve) aus dem Fallen ins Steigen übergeht, dann geht ihr D. Q. aus dem Negativen ins Positive über, muß also (wenn wir von dem Wert Unendlich absehen) auch einmal Null werden; und zwar an der



Stelle, wo die Curve weder fällt noch ſteigt, ſondern ihren tiefſten Punkt (Minimum) hat. Wenn die Curve aus dem Steigen ins Fallen übergeht, muß der D. Q. aus dem Poſitiven ins Negative übergehen, alſo wiederum Null werden; und zwar an der Stelle, wo die Curve ihren höchſten Punkt (Maximum) hat. (Vgl. Fig. 12.)



III. Betrachten wir z. B. die Curve

$$y = x^2 - 8x + 5.$$

Der D. Q. $y' = 2x - 8 = 2(x - 4)$
ist für Werte von $x < 4$ negativ
für Werte von $x > 4$ positiv.

Die Curve fällt also zuerst bis zum Wert $x = 4$ und beginnt von da an zu steigen. Für $x = 4$ hat sie ein Minimum.

Übungsaufgaben:

Das Steigen und Fallen folgender Curven soll untersucht werden:

1)	$y = x^2 - 10x - 1$	Min. für $x = 5$
2)	$y = 6x - x^2 + 2$	Max. für $x = 3$
3)	$y = 2x^2 - 12x + 3$	Min. für $x = 3$
4)	$y = 1 - 18x - 9x^2$	Max. für $x = -1$
5)	$y = x^2$	Min. für $x = 0$
6)	$y = x^3$	steigt immer
7)	$y = \frac{1}{5} x^5$	steigt immer
8)	$y = -2x^3$	fällt immer
9)	$y = -x^5$	fällt immer
10)	$y = +\sqrt{4 - x^2}$	Max. für $x = 0$
11)	$y = -\sqrt{4 - x^2}$	Min. für $x = 0$
12)	$y = ax - x^2$	Max. für $x = \frac{a}{2}$

§ 25. Mehrfaches Differenziren.

I. Um die Maxima und Minima einer Function leichter zu finden, müssen wir zunächst noch einmal

auf die Operation des Differenzirens zurückgehen. Ist

$$y = f(x)$$

irgend eine beliebige Function von x, dann ist der Differentialquotient

$$y' = f'(x)$$

im Allgemeinen wieder eine Function von x. Diese neue Function $f'(x)$ kann man nun wieder differenziren; und dieser neue D. Q. heißt „zweiter D. Q. oder zweite Ableitung von $y = f(x)$" und wird mit

$$y'' = f''(x)$$

bezeichnet. Auch $y'' = f''(x)$ ist im Allgemeinen eine Function von x und ihr D. Q. ist

$$y''' = f'''(x)$$

und heißt „IIIte Ableitung von $y = f(x)$". In gleicher Weise kann man fortfahren und eine 4te, 5te, n-te Ableitung

$$y^{(n)} = f^{(n)}_{(x)} \text{ finden.}$$

II. Sei z. B. $y = x^5$, dann ist

$$\begin{aligned} y' &= 5x^4 && = f'(x) \\ y'' &= 4 \cdot 5 \cdot x^3 && = f''(x) \\ y''' &= 3 \cdot 4 \cdot 5\, x^2 && = f'''(x) \\ y^{IV} &= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5\, x && = f^{IV}(x) \\ y^{V} &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 && = f^{V}(x) = \text{Constans;} \end{aligned}$$

also $y^{VI} = 0$.

Übungsaufgaben:

Von folgenden Functionen soll der erste, zweite, dritte u. s. w. D. Q. gefunden werden.

1) $y = x^4$

$$\begin{aligned} y' &= 4x^3 \\ y'' &= 12x^2 \\ y''' &= 24x \\ y^{IV} &= 24 \\ y^{V} &= 0 \end{aligned}$$

2) $y = (1-x)^3$ $\quad y' = -3(1-x)^2$, $y'' = 6(1-x)$, $y''' = -6$, $y^{IV} = 0$

3) $y = \sqrt{x^9}$ $\quad y' = \frac{9}{2} x^{\frac{7}{2}}$, $y'' = \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2} x^{\frac{5}{2}}$, $y^{III} = \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}}$, ⋮

4) $y = \sqrt[3]{x^{10}}$ $\quad y' = \frac{10}{3} x^{\frac{7}{3}}$, $y'' = \frac{10}{3} \cdot \frac{7}{3} x^{\frac{4}{3}}$, ⋮

5) $y = 1 + x^3$ $\quad y' = 2x$, $y'' = 2$, $y^{III} = 0$

6) $y = \frac{1}{x}$ $\quad y' = -\frac{1}{x^2}$, $y'' = \frac{2}{x^3}$, $y''' = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}$, $y^{IV} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}$, ⋮

7) $y = \sqrt{x}$ $\quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$, ⋮

Von folgenden Functionen soll nur der (1. und) 2. D. Q. bestimmt werden:

8) $y = x^4 - 3x^3 + 5x - 1$ $\quad y'' = 12x^2 - 6$

9) $y = x^5 - 2x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x + 1$
$y'' = 20x^3 - 24x^2 + 18x$

10) $y = \sqrt[3]{x^2}$ $\quad y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$

11) $y = \sqrt{5 - x^2}$ $\quad y'' = \frac{-5}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$

12) $y = \sqrt{2px}$ $\quad y'' = \frac{-p^2}{\sqrt{(2px)^3}}$

13) $y = x + \frac{1}{x}$ $\quad y'' = \frac{2}{x^3}$

14) $y = \frac{x}{(1-x)^2}$ $\quad y'' = \frac{2(2+x)}{(1-x)^4}$

§ 26. Maxima und Minima.

I. In § 24 wurde gezeigt, daß im Falle eines Maximums der D. Q. aus dem Positiven ins Negative übergeht, also selbst abnimmt. Also muß der D. Q. des Differentialquotienten für den Fall eines Maximums negativ sein. Hat die Curve ein Minimum, so muß der D. Q. aus dem Negativen ins Positive übergehen, also wachsen. Der D. Q. des Differentialquotienten muß also für den Fall eines Minimums positiv sein. In Verbindung mit § 24 ergiebt dies folgenden Satz:

Hat eine Function $y = f(x)$ in einem Punkt ein Maximum, dann muß der I. D. Q.
$y' = f'(x)$ zu Null und der II. D.Q.
$y'' = f''(x)$ negativ werden.[1])

Hat aber die Function $y = f(x)$ ein Minimum, dann muß $y' = f'(x)$ zu Null und
$y'' = f''(x)$ positiv werden.[1])

1) Der Fall $f''(x) = 0$, für den sowohl ein Maximum als ein Minimum eintreten kann, ist außer Acht gelassen.

In beiden Fällen wird

$$y' = f'(x) = 0. \quad \text{Also}$$
$$\operatorname{tg} \tau = 0$$
$$\tau = 0 \text{ Grad.}$$

D. h. In einem Maximum- oder Minimumpunkt geht die Tangente der x-Achse parallel.

Wenn der II. D. Q. Null wird, dann muß auf andere Weise — etwa durch Aufzeichnen der Curve — entschieden werden, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt.

II. Beispiele. 1) Es soll untersucht werden, ob der Ausdruck $y = \frac{1}{3} x^3 - \frac{5}{2} x^2 + 6 x - 4$ ein Maximum oder Minimum hat.

Hier ist $y' = x^2 - 5 x + 6$, der I. D. Q.
$y'' = 2 x - 5$, der II. „

Hat die Curve irgend ein Maximum, dann muß $x^2 - 5 x + 6$ gleich Null sein; also

$$x^2 - 5 x + 6 = 0.$$

Dies ergiebt die Werte

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3,$$

für welche ein Maximum oder Minimum vorliegen kann. Um dies zu untersuchen, prüfen wir den II. D. Q. $2 x - 5$, indem wir die zu untersuchenden Werte darin einsetzen. Nun wird:

$$2 \cdot 2 - 5 = -1$$
$$2 \cdot 3 - 5 = +1$$

Im ersten Fall, $x_1 = 2$ haben wir also ein Max., im zweiten Fall, $x_2 = 3$ ein Min.

2) Hat der Ausdruck $y = x^2 - 8 x + 1$ ein Max. oder Min.?

Hier wird $y = x^2 - 8x + 1$
$y' = 2x - 8$
$y'' = 2$

Für $2x - 8 = 0$, oder $x = 4$ kann ein Max. oder Min. vorliegen.

Da nun $y'' = 2$ (stets) positiv ist, so haben wir ein Minimum.

III. Hat eine Function $y = f(x)$, für $x = \alpha$ ein Maximum oder Minimum, dann wird meistens auch der Maximalwert $f(\alpha)$ verlangt.

In den beiden Beispielen ist
das Maximum für

$$x_1 = 2, f(2) = \frac{1}{3}2^3 - \frac{5}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 4 = \frac{2}{3}$$

das Minimum für

$$x_2 = 3, f(3) = \frac{1}{3}3^3 - \frac{5}{2} \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 - 4 = \frac{1}{2}$$

das Minimum für

$x = 4$, $f(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 - 1 = -17$.

Übungsaufgaben:

Von folgenden Functionen sollen die Maxima- und Minimapunkte gefunden werden; alsdann sind die zugehörigen Curven zu zeichnen.

1) $y = 3x^2 - 24x + 5$ Min. für $x = 4$
2) $y = 2x^2 - 12x + 1$ Min. für $x = 3$
3) $y = 2x^2 + 18x - 7$ Min. für $x = -\frac{9}{2}$
4) $y = 5x^2 + 2x + 16$ Min. für $x = -\frac{1}{5}$

5) $y = 1 - 6x - 3x^2$ Max. für $x = -1$

6) $y = 3 + 10x - x^2$ Max. für $x = 5$

7) $y = 5 + 8x - 2x^2$ Max. für $x = 2$

8) $y = 4 - 7x - x^2$ Max. für $x = -\frac{7}{2}$

9) $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 15$ Max. $x = 2$, Min. $x = 6$

10) $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ Max. $x = \frac{1}{3}$, Min. $x = 1$

11) $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 5$ Max. $x = 1$, Min. $x = 3$

12) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x - \frac{1}{2}$ Min. für $x = 3$, Max. für $x = -2$

13) $y = x^3 - 12x + 5$ Min. für $x = +2$, Max. für $x = -2$

14) $y = 5x^3 - 45x + 1$ Min. für $x = +\sqrt{3}$, Max. für $x = -\sqrt{3}$

15) $y = x^2 - x^3$ Max. $x = \frac{2}{3}$, Min. $x = 0$

16) $y = x^2 (4 - x)^2$ Min. für $x = 0, x = 4$, Max. für $x = 2$

17) $y = \frac{1 + x^2}{x}$ Max. $x = -1$, Min. $x = +1$

18) $y = \frac{x}{(2 + x)^2}$ Max. $x = 2$, Min. $x = -2$

19) $y = x + \sqrt{1 - x}$ Max. $x = \frac{3}{4}$

20) $y = x + \frac{1}{x} - 1$ Max. $x = -1$, Min. $x = +1$.

§ 27. Aufgaben über Maxima und Minima.

1) Die Zahl 100 soll in 2 Factoren zerlegt werden, deren Summe möglichst klein wird.

Ist die eine Zahl x, dann ist die andere $\frac{100}{x}$, und $x + \frac{100}{x}$ soll ein Minimum werden. Es muß also der D. Q.

$$1 - \frac{100}{x^2} \text{ gleich Null sein,}$$

dies ergiebt $x = (+)\ 10$.

Der II. D. Q. ist $\frac{200}{x^3}$

und wird positiv für $x = 10$
(negativ für $x = -10$)

Also sind 10 . 10 die Factoren.

2) Eine Strecke von 20 m Länge soll so in 2 Teile geteilt werden, daß deren Rechteck ein Maximum wird. Wie sind die Längen zu wählen?

$$x = 10.$$

3) Welches von allen Rechtecken mit gleichem Inhalt hat den kleinsten Umfang? (Quadrat.)

4) Welches von allen Rechtecken mit gleichem Umfang hat den größten Inhalt? (Quadrat).

5) Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist c; Wie sind die Katheten zu wählen, daß die Fläche des Dreiecks ein Max. wird?

$$\left(\text{Beide} = \frac{c}{\sqrt{2}}\right)$$

6) Die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind zusammen 36 cm. Wie groß sind die Katheten zu wählen, damit die Hypotenuse ein Minimum wird? (= 18 cm)

7) In eine Ellipse soll das größte Rechteck eingezeichnet werden; wie groß sind die Seiten zu wählen?

(a $\sqrt{2}$ und b $\sqrt{2}$)

8) Aus einer Strecke von der Länge s soll der Gesamtumfang eines Kreissectors gebildet werden. Wie groß ist dabei der Radius zu wählen, damit der Flächeninhalt des Sectors ein Maximum wird?

$\left(x = \frac{s}{4}\right)$

9) Ein Punkt P_1 mit den Cordinaten $x_1 = 3$, $y_1 = 5$ ist gegeben. Eine durch P_1 gezogene Gerade schneidet die x-Axe in A, die y-Axe in B. Wie groß ist OA zu wählen, damit der Inhalt des Dreiecks OAB ein Minimum wird? (OA = 6)

10) Einer Kugel vom Radius r ist ein Cylinder von möglichst großem Inhalt einzubeschreiben. Wie ist die Höhe des Cylinders zu wählen?

$\left(h = \frac{2}{\sqrt{3}} r.\right)$

11) In einen Kegel vom Radius r und der Höhe h soll ein Cylinder von möglichst großem Inhalt eingeschrieben werden. Wie ist die Höhe des Cylinders zu wählen?

$\left(x = \frac{1}{3} h\right)$

12) Die Zahl 12 soll so in 2 Summanden zerlegt werden, daß die Summe der Quadrate ein Minimum wird. (12 = 6 + 6)

13) Die Zahl 18 soll so in 2 Summanden zerlegt werden, daß die Summe der Cuben ein Minimum wird. $(81 = 9 + 9)$

14) Aus einer Strecke von der Länge l soll man Grundlinie und Höhe eines Dreiecks bilden. Wie groß ist die Grundlinie zu nehmen, damit der Flächeninhalt ein Maximum wird?

$$\left(x = \frac{l}{2}\right)$$

15) Einer Kugel vom Radius r soll ein Kegel von möglichst großem Flächeninhalt eingeschrieben werden. Wie groß muß die Höhe des Kegels angenommen werden?

$$\left(x = \frac{4}{3}r\right)$$

16) Aus den 4 Ecken eines Quadrates von der Seite $a = 24$ cm sollen 4 gleiche Quadrate ausgeschnitten werden, so daß aus dem übrigbleibenden Stück ein viereckiger Kasten von möglichst großem Inhalt entsteht. Wie groß müssen die Seiten der abgeschnittenen Quadrate sein? $(x = 4)$

17) Einem Dreieck mit der Grundlinie $AB = c$ und der Höhe h soll ein Rechteck so einbeschrieben werden, daß eine Seite desselben auf AB fällt. Wie ist die Höhe des Rechtecks zu wählen, damit dessen Inhalt ein Maximum wird?

$$\left(x = \frac{h}{2}\right)$$

18) Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist $a + b = 24$, der eingeschlossene Winkel sei γ. Wie groß ist a zu wählen, damit der Inhalt des Dreiecks ein Maximum wird? $(a = 12)$.

§ 28. Die logarithmische Function.

Nachdem wir in den § 23—27 einige Anwendungen des Differenzirens kennen gelernt haben, kehren wir wieder zu unserem Ausgangspunkt zurück und wollen jetzt zunächst für die Functionen der §§ 6—9 die D. Q. bestimmen.

Ist $y = \log x$, wobei wir die Basis des Logarithmensystems noch beliebig annehmen können, dann wird der Differenzenquotient

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\log (x_1) - \log x}{x_1 - x},$$ oder wenn man für x_1 seinen anderen Wert $x + \triangle x$ setzt,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\log (x + \triangle x) - \log x}{\triangle x}$$

Hierfür kann man nach den bekannten Sätzen über Logarithmen auch schreiben:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\log \frac{x + \triangle x}{x}}{\triangle x} = \frac{\log \left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right)}{\triangle x} \text{ oder}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \log \left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right)^{\frac{1}{\triangle x}}, \text{ oder endlich}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{x} \cdot \log \left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right)^{\frac{x}{\triangle x}}$$

Um diesen Ausdruck zu berechnen setzen wir $\frac{x}{\triangle x} = z$; dann wird

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{x} \cdot \log \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z}$$

Wird nun $\triangle x = 0$, dann wird $z = \infty$, und $\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z$ erlangt die unbestimmte Gestalt 1^∞, wofür in § 11 der Grenzwert $e = 2{,}71828$ gefunden wurde. Also finden wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \log \left[\lim_{z = \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \right]$$

$$\text{oder } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log e$$

Dies ergiebt die Formel:

$$\text{Ist } y = \log x, \text{ dann ist } y' = \frac{1}{x} \log e.$$

II. Diese Formel gewinnt eine besonders einfache Gestalt, wenn man die Basis des Logarithmensystems so wählt, daß log e gleich 1 wird; d. h. wenn man $e = 2,\ 71828\ldots\ldots$ selber zur Basis des Logarithmensystems wählt. (Der Logarithmus der Basis ist ja stets gleich 1). Dann wird $y' = \frac{1}{x}$.

Man nennt nun die Logarithmen, welche auf die Basis $e = 2,\ 71828\ldots$ bezogen sind, „natürliche Logarithmen" und bezeichnet sie mit l (x). In der höheren Mathematik werden fast nur natürliche Logarithmen gebraucht. Um einen natürlichen Log. zu differenziren, haben wir nun folgende einfache Formel

$$\text{Ist } y = l\,(x), \text{ dann ist } y' = \frac{1}{x}.$$

III. Ist $y = l(f(x))$ dann wird nach § 20

$$y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x);$$

oder, wenn man $f(x) = u$ setzt:

Ist $y = l(u)$; dann ist

$$y' = \frac{u'}{u}.$$

Dies ergiebt folgende Regel:

Der Logarithmus einer Function wird differenzirt, indem man einen Bruch bildet, in dessen Nenner die Function, in dessen Zähler der D. Q. der Function steht.

IV. Beispiele:

Ist $y = l(2x^3 - 5x^2 + 10x - 1)$, dann ist

$$y' = \frac{6x^2 - 10x + 10}{2x^3 - 5x^2 + 10x - 1}$$

Ist $y = \log_{(10)}(5x^3 - 1)$, dann ist

$$y' = \frac{15x^2}{5x^3 - 1} \log_{(10)} e$$

Übungsaufgaben.

Folgende Functionen sind zu differenzieren:

1) $y = l(x^2 - 1)$ $\quad y' = \frac{2x}{x^2 - 1}$

2) $y = l(1 - x)$ $\quad y' = \frac{-1}{1 - x}$

3) $y = l(x^3 - 3x^2 + 2)$ $\quad y' = \frac{3(x-2)x}{x^3 - 3x^2 + 2}$

4) $y = l(1 - x^4)$ $\quad y' = \frac{-4x^3}{1 - x^4}$

5) $y=l(x^5)$ $y'=\frac{5}{x}$

6) $y=l(x^n)$ $y'=\frac{n}{x}$

7) $y=l\left(\frac{1}{x}\right)$ $y'=-\frac{1}{x}$

8) $y=l(3x)$ $y'=\frac{1}{x}$

9) $y=l(5x)$ $y'=\frac{1}{x}$

10) $y=l(3)$ $y'=0$

11) $y=l(5x^4)$ $y'=\frac{4}{x}$

12) $y=l(ax^n)$ $y'=\frac{n}{x}$

13) $y=l\left(1+\frac{1}{x}\right)$ $y'=\frac{-1}{x(1+x)}$

14) $y=l(\sqrt{x})$ $y'=\frac{1}{2x}$

15) $y=l(\sqrt[3]{x})$ $y'=\frac{1}{3x}$

16) $y=l(\sqrt[n]{x})$ $y'=\frac{1}{nx}$

17) $y=l(\sqrt{x^3})$ $y'=\frac{3}{2x}$

18) $y=l(2\sqrt[4]{x^3})$ $y'=\frac{3}{4x}$

19) $y=l(5\sqrt[3]{x^7})$ $y'=\frac{7}{3x}$

20) $y=l(\alpha\sqrt{x^9})$ $y'=\frac{9}{px}$

21) $y=l\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $\quad y'=-\frac{1}{2x}$

22) $y=l\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$ $\quad y'=-\frac{1}{4x}$

23) $y=l\left(\frac{3}{5\sqrt[3]{x^2}}\right)$ $\quad y'=-\frac{2}{3x}$

24) $y=l\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x^\alpha}}\right)$ $\quad y'=-\frac{\alpha}{nx}$

25) $y=l(1-\sqrt{x})$ $\quad y'=\frac{1}{2(x-\sqrt{x})}$

26) $y=l(x+\sqrt{1+x^2})$ $\quad y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

27) $y=l\frac{(a+\sqrt{a^2-x^2})}{x}$ $\quad y'=-\frac{a}{x\sqrt{a^2-x^2}}$

28) $y=l(\sqrt{\alpha x-x^2})$ $\quad y'=\frac{\alpha-2x}{2ax-2x^2}$

29) $y=l\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad y'=-\frac{x}{1+x^2}$

30) $y=l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ $\quad y'=\frac{2}{1-x^2}$

31) $y=l\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ $\quad y'=-\frac{2}{1-x^2}$

32) $y=l\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ $\quad y'=\frac{1}{1-x^2}$

33) $y=l\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$ $\quad y'=-\frac{1}{1-x^2}$

34) $y=l\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ $\quad y'=\frac{1}{x(1-x^2)}$

35) $y=[l(x)]^n=l^n(x)$ $\quad y'=\frac{n\cdot l^{n-1}(x)}{x}$

36) $y=l^5(x)$ $\quad y'=\frac{5\cdot l^4(x)}{x}$

37) $=l^2(ax+b)$ $\quad y'=\frac{2a\,l(ax+b)}{ax+b}$

38) $y=l^3(5x^4)$ $\quad y'=\frac{12\,l^2(5x^4)}{x}$

39) $y=l^5\left(\sqrt[5]{x}\right)$ $\quad y'=\frac{l^4\left(\sqrt[5]{x}\right)}{x}$

40) $y=l^2\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad y'=\frac{-2l\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$

41) $y=x+l(x)$ $\quad y'=1+\frac{1}{x}$

42) $y=3x^2+l(x^4)$ $\quad y'=6x+\frac{4}{x}$

43) $y=l(x)-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}$ $\quad y'=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$

44) $y=\sqrt{\alpha x+\beta}-l(\alpha x+\beta)$ $\quad y'=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha x+\beta}}-\frac{\alpha}{\alpha x+\beta}$

45) $y=x\cdot l(x)$ $\quad y'=1+l(x)$

46) $y=x^2l(x)$ $\quad y'=x(1+2\,l(x)$

47) $y=x^3l(x)$ $\quad y'=x^2(1+3l(x)$

48) $y=x^n\,l(x)$ $\quad y'=x^{n-1}(1+n\,l(x))$

49) $y=(ax+b)\cdot l(x)$ $\quad y'=\frac{ax+b}{x}+a\,l(x)$

50) $y=(ax+b)^3\cdot l(x)$

$$y'=(ax+b)^2\left(\frac{ax+b}{x}+3a\,l(x)\right)$$

51) $y=(1+x^2)l(1-x^2)$ $\quad y'=2x\left(l(1-x^2)-\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$

52) $y=\sqrt{x}\cdot l(x)$ $\quad y'=\frac{2+l(x)}{2\sqrt{x}}$

53) $y=\frac{l(x)}{x}$ $\quad y'=\frac{1-l(x)}{x^2}$

54) $y=\frac{l(x)}{x^2}$ $\quad y'=\frac{1-2l(x)}{x^3}$

55) $y=\frac{l(x)}{x^5}$ $\quad y'=\frac{1-5l(x)}{x^6}$

56) $y=\frac{l(x)}{x^n}$ $\quad y'=\frac{1-nl(x)}{x^{n+1}}$

57) $y=\frac{x}{l(x)}$ $\quad y'=\frac{l(x)-1}{l^2(x)}$

58) $y=\frac{x^3}{l(x)}$ $\quad y'=\frac{x^2(3l(x)-1)}{l^2(x)}$

59) $y=\frac{1}{x}\cdot l(\frac{1+x}{1-x})$ $\quad y'=\frac{\cdot 2}{x(1-x^2)}-\frac{1}{x^2}l(\frac{1+x}{1-x})$

60) $y=\frac{x}{1-x}\cdot l(x)$ $\quad y'=\frac{1-x+l(x)}{(1-x)^2}$

61) $y=\sqrt{l(x)}$ $\quad y'=\frac{1}{2x\sqrt{l(x)}}$

62) $y=\sqrt{1+l(x)}$ $\quad y'=\frac{1}{2x\sqrt{1+l(x)}}$

63) $y=\frac{1}{l(x)}$ $\quad y'=-\frac{1}{xl^2(x)}$

64) $y=\sqrt{x\cdot l(x)}$ $\quad y'=\frac{1+l(x)}{2\cdot\sqrt{x\cdot l(x)}}$

65) $y=\sqrt{x^3l(x)}$ $\quad y'=\frac{x^2(1+3l(x))}{2\sqrt{x^3l(x)}}$

§ 29. Die Exponentialfunction.

Um die Function

$$y = a^x$$

zu differenziren, logarithmiren wir obige Gleichung und finden dann

$$l(y) = x \cdot l(a) \text{ oder}$$

$$x = \frac{1}{l(a)} \cdot l(y).$$

Nun bilden wir den D. Q. nach y, wobei zu beachten ist, daß $\frac{1}{l(a)}$ einen constanten Factor darstellt; dies ergiebt: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{l(a) \cdot y}$; daher

$\frac{dy}{dx} = y \cdot l(a)$; und wenn man für y seinen Wert a^x einsetzt,

$$\frac{dy}{dx} = a^x \cdot l(a).$$

Dies ergiebt die Regel:

Ist $y = a^x$, dann ist $y' = a^x \, l(a)$.

Setzt man $a = e = 2,71828\ldots$, dann wird $y = e^x$ und $y' = e^x \, l(e) = e^x$

Also:

Ist $y = e^x$, dann ist $y' = e^x$.

Die Function e^x hat also die merkwürdige Eigenschaft, daß ihr D. Q. ebenfalls gleich e^x ist.

Ist $y = e^{f(x)}$, dann wird

$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$, oder für $f(x) = u$,

Ist $y = e^u$, dann wird

$y' = e^u \cdot u'$.

Ist $y = a^u$, dann ist
$y' = a^u \cdot u' \cdot l\,(a)$.

Übungsaufgaben:

1)	$y = e^{x^2}$	$y' = e^{x^2} \cdot 2x$
2)	$y = e^{x^n}$	$y' = e^{x^n} \cdot n x^{n-1}$
3)	$y = e^{\alpha x + \beta}$	$y' = e^{\alpha x + \beta} \cdot \alpha$
4)	$y = e^{-5x}$	$y' = -5 \cdot e^{-5x}$
5)	$y = e^{\sqrt{x}}$	$y' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
6)	$y = e^{x+1}$	$y' = e^{x+1}$
7)	$y = e^0$	$y' = 0$
8)	$y = e^{\sqrt{1-x^2}}$	$y' = e^{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$
9)	$y = a^{3x}$	$y' = a^{3x} l(a)$
10)	$y = 2^x$	$y' = 2^x l(2)$
11)	$y = 4^{\alpha x + \beta}$	$y' = 4^{\alpha x + \beta} \cdot \alpha l(4)$
12)	$y = 4\, e^{\frac{x}{4}}$	$y' = e^{\frac{x}{4}}$
13)	$y = x \cdot e^x$	$y' = e^x (1 + x)$
14)	$y = x^2 \cdot e^x$	$y' = x \cdot e^x (2 + x)$
15)	$y = x^n \cdot e^x$	$y' = x^{n-1} (n + x) e^x$
16)	$y = (x - 1) \cdot e^x$	$y' = x \cdot e^x$
17)	$y = (x^2 - 2x + 2) e^x$	$y' = x^2 \cdot e^x$
18)	$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$	$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)$
19)	$y = m\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)^2$	$y' = 2\left(e^{\frac{2x}{m}} - e^{-\frac{2x}{m}}\right)$
20)	$y = \frac{e^x}{x}$	$y' = \frac{e^x (x-1)}{x^2}$

21) $y=\frac{e^x}{x^2}$ $y'=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$

22) $y=\frac{e^x}{x^n}$ $y'=\frac{e^x(x-n)}{x^{n+1}}$

23) $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ $y'=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

24) $y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$ $y'=-\frac{2e^x}{(e^x-1)^2}$

25) $y=\sqrt{e^x}$ $y'=\frac{\sqrt{e^x}}{2}$

26) $y=\sqrt{e^{5x}}$ $y'=\frac{5}{2}\sqrt{e^{5x}}$

27) $y=\sqrt{e^{x^3}}$ $y'=\frac{3x^2}{2}\sqrt{e^{x^3}}$

28) $y=e^{l(x)}$ $y'=\frac{e^{l(x)}}{x}$

29) $y=e^x l(x)$ $y'=e^x\left(\frac{1}{x}+l(x)\right)$

30) $y=\frac{e^x}{l(x)}$ $y'=\frac{e^x\left(l(x)-\frac{1}{x}\right)}{l^2(x)}$

31) $y=e^x+l(x)+x^3$ $y'=e^x+\frac{1}{x}+3x^2$

32) $y=\frac{1}{e^x+1}$ $y'=\frac{-e^x}{(e^x+1)^2}$

33) $y=\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}$ $y'=\frac{-e^x}{2\sqrt{(e^x+1)^3}}$

34) $y=\sqrt{x\cdot(3^x+1)}$ $y'=\frac{3^x(x+1)+1}{2\sqrt{x(2^x+1)}}l(3)$

35) $y=(5^{3x}+1)^4$ $y'=4(5^{3x}+1)^3\cdot 5^{3x}\cdot 3l(5)$

§ 30. Die Functionen Sinus und Cosinus.

I. Um die Functionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ zu differenziren, leiten wir zunächst einen Hilfssatz aus der Trigonometrie ab. Es ist bekanntlich:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$, und
$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

Durch Subtraction ergiebt dies:

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Setzt man nun $\alpha + \beta = x'$
$\alpha - \beta = x$ so daß also

$$\alpha = \frac{x' + x}{2}$$

$$\beta = \frac{x' - x}{2}, \text{ dann wird:}$$

$$\sin x' - \sin x = 2 \cos\frac{x' + x}{2} \cdot \sin\frac{x' - x}{2}.$$

Haben wir also die Function $y = \sin x$, dann wird $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\sin x' - \sin x}{x' - x}$. Der Zähler dieses Bruches läßt sich nach der eben abgeleiteten Formel umformen; dann wird

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{2 \cdot \cos\frac{x' + x}{2} \sin\frac{x' - x}{2}}{x' - x}$$

oder:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\cos\frac{x'+x}{2} \cdot \sin\frac{x'-x}{2}}{\frac{x'-x}{2}}$$

Setzt man nun noch $\frac{x'-x}{2} = z$, dann wird

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \cos\frac{x'+x}{2} \cdot \frac{\sin z}{z}$$

Geht man nun zur Grenze über, indem man $x'=x$, also $z=0$ werden läßt, dann erhält $\frac{\sin z}{z}$ die unbestimmte Gestalt $\frac{0}{0}$, deren wirklicher Wert im § 11 bestimmt wurde; nämlich $\lim\limits_{z=0} \frac{\sin z}{z} = 1$

Es wird daher:

$$\frac{dy}{dx} = \cos\frac{x+x}{2} \cdot \lim_{z=0} \frac{\sin z}{z} \quad \text{Also } \frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Dies ergiebt die Regel:

Ist $y = \sin x$, dann ist $y' = \cos x$.

Den D. Q. von $y = \cos x$ kann man auf ähnliche Weise, leichter aber durch Zurückführen auf Sinus finden:

Es ist $\cos \alpha = \sin (90^0 - \alpha)$, also in Bogenmaaß $\cos x = \sin (\frac{\pi}{2} - x)$.

Es wird daher $y = (\cos x =) \sin (\frac{\pi}{2} - x)$,

also $y' = \cos (\frac{\pi}{2} - x) \cdot (-1)$

oder $y' = -\cos (\frac{\pi}{2} - x) = -\sin x$.

Oder auf folgende Weise:

$$y = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$y' = \frac{-2 \sin x \cdot \cos x}{2\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{-2 \sin x \cdot \cos x}{2 \cos x}$$

$$y' = -\sin x.$$

Dies ergiebt die Regel:

Ist $y = \cos x$, dann ist $y' = -\sin x$.
(Man beachte das Minuszeichen.)

Nach § 20 wird für

$y = \sin f(x)$, $y' = \cos f(x) \cdot f'(x)$
$y = \cos f(x)$, $y' = -\sin f(x) \cdot f'(x)$
oder wenn man $f(x) = u$ setzt.

Ist $y = \sin u$, dann ist $y' = \cos u \cdot u'$
$y = \cos u$, dann ist $y' = -\sin u \cdot u'$

Übungsaufgaben:

1) $y = \sin(3x)$ — $y' = 3\cos(3x)$
2) $y = \cos(5x)$ — $y' = -5\sin(5x)$
3) $y = \sin(mx+n)$ — $y' = m\cos(mx+n)$
4) $y = \cos(n-mx)$ — $y' = m\sin(n-mx)$
5) $y = \sin\frac{x}{5}$ — $y' = \frac{1}{5}\cos\frac{x}{5}$
6) $y = 6\cos\frac{x}{6}$ — $y' = -\sin\frac{x}{6}$
7) $y = \sin(x^2)$ — $y' = 2x \cdot \cos(x^2)$
8) $y = \sin(x^n)$ — $y' = n \cdot x^{n-1}\cos(x^n)$
9) $y = \cos(x^3)$ — $y' = -3x^2\sin(x^3)$
10) $y = \cos(x^n)$ — $y' = -n \cdot x^{n-1}\sin(x^n)$
11) $y = \cos(1-x^2)$ — $y' = 2x\sin(1-x^2)$
12) $y = \cos(1-x+x^2)$ — $y' = (1-2x)\sin(1-x+x^2)$
13) $y = \sin\sqrt{ax}$ — $y' = \frac{a\cos\sqrt{ax}}{2\sqrt{ax}}$
14) $y = \cos\sqrt{ax}$ — $y' = \frac{-a\sin\sqrt{ax}}{2\sqrt{ax}}$
15) $y = \sin\frac{1}{x}$ — $y' = -\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}$

16) $y=\cos\frac{1}{x}$ $\quad y'=\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}$

17) $y=\sin\frac{1}{x^2}$ $\quad y'=\frac{-2\sin\frac{1}{x^2}}{x^3}$

18) $y=\cos\frac{1}{x^2}$ $\quad y'=\frac{2\cos\frac{1}{x^2}}{x^3}$

19) $y=(\sin x)^2=\sin^2 x$ $\quad y'=2\sin x\cos x=\sin(2x)$

20) $y=(\cos x)^2=\cos^2 x$ $\quad y'=-\sin(2x)$

21) $y=\sin^3 x$ $\quad y'=3\sin^2 x\cos x$

22) $y=\cos^4 x$ $\quad y'=-4\cos^3 x\sin x$

23) $y=\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad y'=\frac{2}{x^2}\cos\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}=\frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2}$

24) $y=\cos^3\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad y'=\frac{3}{x^2}\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

25) $y=\frac{1}{\sin x}$ $\quad y'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

26) $y=\frac{1}{\cos x}$ $\quad y'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$

27) $y=\frac{1}{\sin^2 x}$ $\quad y'=-\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$

28) $y=\frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad y'=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$

29) $y=\frac{1}{\cos^5 x}$ $\quad y'=\frac{5\sin x}{\cos^6 x}$

30) $y=\frac{1}{\sin^6 x}$ $\quad y'=\frac{-6\cos x}{\sin^7 x}$

31) $y=\sqrt{\sin x}$ $\quad y'=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

32) $y=\sqrt{\cos x}$ $\quad y'=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

33) $y=l(\sin x)$ $\quad y'=\cot x$

34) $y=l(\cos x)$ $\quad y'=-\operatorname{tang} x$

35) $y=l\left(\sin\frac{x-1}{x}\right)$ $\quad y'=\frac{1}{x^2}\cot\frac{x-1}{x}$

36) $y=l(\sin\sqrt{1+3x})$ $\quad y'=\frac{3}{2\sqrt{1+3x}}\cot\sqrt{1+3x}$

37) $y=\cos\sqrt{\frac{1}{x}}$ $\quad y'=\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\sin\sqrt{\frac{1}{x}}$

38) $y=l\left(\cos\sqrt{\frac{1}{x}}\right)$ $\quad y'=\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\operatorname{tg}\sqrt{\frac{1}{x}}$

39) $y=e^{\sin x}$ $\quad y'=\cos x\cdot e^{\sin x}$

40) $y=e^{\cos x}$ $\quad y'=-\sin x\cdot e^{\cos x}$

41) $y=x\cdot\sin x$ $\quad y'=x\cdot\cos x+\sin x$

42) $y=x\cdot\sin x$ $\quad y'=-x\sin x+\cos x$

43) $y=x^2\sin x$ $\quad y'=x(x\cos x+2\sin x)$

44) $y=x^2\cos x$ $\quad y'=x(-x\sin x+2\cos x)$

45) $y=x^n\sin x$ $\quad y'=x^{n-1}(x\cos x+n\sin x)$

46) $y=x^n\cos x$ $\quad y'=x^{n-1}(-x\sin x+n\cos x)$

47) $y=\frac{\sin x}{x}$ $\quad y'=\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2}$

48) $y=\frac{\cos x}{x}$ $\quad y'=-\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}$

49) $y=\frac{\cos x}{x^3}$ $\quad y'=-\frac{x\sin x+3\cos x}{x^4}$

50) $y=\frac{\sin x}{x^4}$ $\quad y'=\frac{x\cos x-4\sin x}{x^5}$

51) $y=e^x\cdot\sin x$ $\quad y'=e^x(\cos x+\sin x)$

52) $y=\frac{\cos x}{e^x}$ $y'=\frac{-(\sin x+\cos x)}{e^x}$

53) $y=\cos x \cdot l(x)$ $y'=\frac{\cos x}{x}-\sin x \cdot l(x)$

54) $y=\frac{l(x)}{\cos x}$ $y'=\frac{\frac{\cos x}{x}+\sin x \cdot l(x)}{\cos^2 x}$

55) $y=\sin x \cdot \cos x$ $y''=\cos(2x)$

56) $y=(1+2\sin x)\cos x$ $y'=2\cos(2x)-\sin x$

57) $y=\sin x \sin(1-x)$ $y'=\sin(1-2x)$

58) $y=\sin x-x\cos x$ $y'=x \cdot \sin x$

59) $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ $y'=0$

60) $y=\cos^2 x-\sin^2 x$ $y'=-2\sin(2x)$

61) $y=2\cos^2 x-\cos(2x)$ $y'=0$

62) $y=3\sin x \cdot \cos^2 x+\sin^3 x$ $y'=3\cos x \cdot \cos 2x$

63) $y=\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{1}{2}\sin^2(2x)$ $y'=0$

64) $y=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ $y'=\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$

65) $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ $y'=\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$

66) $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x \cdot \cos x}$ $y'=\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

67) $y=e^{\sin^2 x}$ $y'=\sin(2x) \cdot e^{\sin^2 x}$

68) $y=e^{\cos^2 x}$ $y'=-\sin(2x)e^{\cos^2 x}$

69) $y=(e^x \cdot \sin x)^2$ $y'=e^{2x} \cdot [2\sin^2 x+\sin(2x)]$

70) $y=\sin x \cdot e^{\sin x}$ $y'=\cos x \cdot e^{\sin x}(\sin x+1)$

71) $y=\cos x \cdot e^{\cos x}$ $y'=-\sin x \cdot e^{\cos x}(\cos x+1)$

72) $y=\sin x \cdot e^{\cos x}$ $y'=e^{\cos x}(\cos x-\sin^2 x)$

73) $y=\cos x \cdot e^{\sin x}$ $y'=e^{\sin x}(\cos^2 x-\sin x)$

§ 31. Die Functionen Tangens und Cotangens.

Die Functionen $y = \text{tang } x$ und $y = \cot x$ können auf die Functionen sin und cos zurückgeführt werden. Es ist daher

$$y = \text{tang } x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \text{Also}$$

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}, \text{ oder}$$

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Ebenso findet man für

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y' = \frac{\sin x \cdot (-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

$$y' = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Dies ergiebt die Regel:

Ist $y = \text{tang } x$, dann ist $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

„ $y = \cot x$, dann ist $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Man kann diesen Formeln noch eine andere Gestalt geben. Es ist

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x \text{ und}$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x; \text{ also auch}$$

für $y = \text{tang } x \quad y' = 1 + \text{tg}^2 x$
„ $y = \cot x \quad y' = -(1 + \cot^2 x)$

Diese letzteren Formen werden wir jedoch nur selten benutzen.

Nach § 20 ist wieder für

$$y = \text{tang } (f(x)), \quad y' = \frac{1}{\cos^2 (f(x))} \cdot f'(x)$$

$$y = \cot (f(x)), \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 (f(x))} \cdot f'(x).$$

Übungsaufgaben:

1) $y = \text{tg}(3x) \qquad y' = \frac{3}{\cos^2 (3x)}$

2) $y = \cot(4x) \qquad y' = \frac{-4}{\sin^2 (4x)}$

3) $y = \text{tg}\ (-5x^2) \qquad y' = \frac{-10x}{\cos^2 (-5x^2)}$

4) $y = \cot(-7x^3) \qquad y' = \frac{21x^2}{\sin^2 (-7x^3)}$

5) $y = \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \qquad y' = \frac{1}{2\cos^2 \left(\frac{x}{2}\right)}$

6) $y = \cot\left(\frac{x}{3}\right) \qquad y' = \frac{-1}{3\sin^2 \left(\frac{x}{3}\right)}$

7) $y = \text{tg}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad y' = -\frac{1}{x^2 \cos^2 \left(\frac{1}{x}\right)}$

8) $y = \text{tg}(x) - \cot(x) \qquad y' = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

9) $y = x \cdot \text{tg}\, x \qquad y' = \frac{x + \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x}$

10) $y = x \cdot \cot x$ $\quad y' = \dfrac{\sin x \cdot \cos x - x}{\sin^2 x}$

11) $y = (x \cdot \operatorname{tg} x)^2$ $\quad y' = 2x \operatorname{tg} x \cdot \dfrac{x + \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x}$

12) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ $\quad y' = \dfrac{\dfrac{x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x}{x^2}$

13) $y = \dfrac{x}{\cot x}$ $\quad y' = \dfrac{\cot x + \dfrac{x}{\sin^2 x}}{\cot^2 x}$

14) $y = a^{\operatorname{tg} x}$ $\quad y' = \dfrac{a^{\operatorname{tg} x} \cdot l(a)}{\cos^2 x}$

15) $y\, a^{-\cot x}$ $\quad y' = \dfrac{a^{-\cot x} \cdot l(a)}{\sin^2 x}$

16) $y = l(\operatorname{tg} x)$ $\quad y' = \dfrac{2}{\sin(2x)}$

17) $y = l(\cot x)$ $\quad y' = \dfrac{-2}{\sin(2x)}$

18) $y = l\left(\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}\right)$ $\quad y' = \dfrac{2}{1 - 2\sin^2 x} = \dfrac{2}{\cos(2x)}$

19) $y = e^x \cdot \operatorname{tg} x$ $\quad y' = \dfrac{e^x}{\cos x}\left(\dfrac{1}{\cos x} + \sin x\right)$

20) $y = e^x \cdot \cot x$ $\quad y' = \dfrac{e^x}{\sin x}\left(\cos x - \dfrac{1}{\sin x}\right)$

21) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$ $\quad y' = \dfrac{1}{2\cos^2 x \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x}}$

22) $y = \sqrt{\cot x}$ $\quad y' = \dfrac{-1}{2\sin^2 x \sqrt{\cot x}}$

23) $y = \operatorname{tg} x + \cot(3x)$ $\quad y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{3}{\sin^2(3x)}$

24) $y = \sin x - \cot(4x)$ $y' = \cos x + \frac{4}{\sin^2(4x)}$.

§ 32. Die Arcusfunctionen.

Um die Functionen $y = \arcsin x$
$y = \arccos x$
$y = \operatorname{artang} x$
$y = \operatorname{arcot} x$ zu differenziren, löſen wir dieſe Gleichungen nach x auf und finden dann die inverſen Gleichungen

$x = \sin y$
$x = \cos y$
$x = \operatorname{tang} y$
$x = \operatorname{cot} y$

Nun bilden wir die D. Q. dieſer trigonometriſchen Functionen und finden

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y$$

$$\frac{dx}{dy} = 1 + \operatorname{tg}^2 y$$

$$\frac{dx}{dy} = -(1 + \operatorname{cot}^2 y)$$

Daraus finden wir dann die D. Q. der Arcusfunctionen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + tg^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + \cot^2 y}$$

Nun können wir noch in den 4 Fällen setzen:

im ersten sin y = x
im zweiten cos y = x
im dritten tg y = x
im vierten cot y = x und finden dann

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$ Dies ergiebt die Regel.

Ist $y = \arcsin x$, dann ist $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

„ $y = \arccos x$, „ „ $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

„ $y = \text{artang } x$, „ „ $y' = \frac{1}{1 + x^2}$

„ $y = \text{accotg } x$, „ „ $y' = -\frac{1}{1 + x^2}$

Hierbei ist besonders zu beachten, daß der D. Q. von arsin und der von arcos sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Gleiches gilt von arctang und arcotg.

Übungsaufgaben.

1) $y = \arcsin(4x)$ $\quad y' = \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$

2) $y = \arccos(5x)$ $\quad y' = \frac{-5}{\sqrt{1-25x^2}}$

3) $y = \operatorname{artang}(7x)$ $\quad y' = \frac{7}{1+49x^2}$

4) $y = \operatorname{arcot}(2x)$ $\quad y' = -\frac{2}{1+4x^2}$

5) $y = \arcsin(1-x)$ $\quad y' = \frac{-1}{\sqrt{2x-x^2}}$

6) $y = \arccos(1-x)$ $\quad y' = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

7) $y = \operatorname{arctg}(1-x)$ $\quad y' = \frac{-1}{2-2x+x^2}$

8) $y = \operatorname{arcot}(1-x)$ $\quad y' = \frac{1}{2-2x+x^2}$

9) $y = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad y' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

10) $y = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

11) $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad y' = -\frac{1}{1+x^2}$

12) $y = \operatorname{arcot}\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad y' = \frac{1}{1+x^2}$

13) $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$ $\quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14) $y = \arccos \sqrt{1-x^2}$ $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ $y' = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$

16) $y = \operatorname{arsin} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $y' = \frac{1}{1+x^2}$

17) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x}$ $y' = \frac{1}{1-2x+2x^2}$

18) $y = \operatorname{arcot} \sqrt{2-x}$ $y' = \frac{1}{2(3-x)\sqrt{2-x}}$

19) $y = x \cdot \operatorname{arsin} x$ $y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \operatorname{arsin} x$

20) $y = x \cdot \operatorname{arcot} x$ $y' = -\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arcot} x$

21) $y = e^x \arccos x$ $y' = e^x \left(\arccos x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

§ 33. Vermischte Übungsaufgaben.

Wir sind nunmehr im Stande sämtliche in der Elementarmathematik auftretenden Functionen zu differenziren. Im Nachstehenden sind noch eine Anzahl Aufgaben über verschiedenartig zusammengesetzte Functionen gegeben. Hierbei wollen wir uns jedoch einer etwas anderen Schreibweise bedienen.

Ist $y = f(x)$, also $\frac{dy}{dx} = f'(x)$,

dann können die Größen dy und dx als unendlich kleine Differenzen (Differenziale) aufgefaßt werden;

man kann alsdann die Gleichung mit dx multiplizieren und findet

$$dy = f'(x) \cdot dx, \text{ oder da } y = f(x) \text{ ist,}$$

so kann man statt dy auch df(x) schreiben; dies erzielt dann die Schreibweise

$$df(x) = f'(x) \cdot dx.$$

Ist z. B. $y = f(x) = x^3$, dann ist

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2, \text{ also}$$

$$dy = 3x^2\,dx, \text{ oder auch}$$

$$d(x^3) = 3x^2\,dx$$

Diese Schreibweise findet besonders in der Integralrechnung Anwendung.

Die Gleichung

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

hat folgende Bedeutung: Ist dx eine unendlich kleine Zunahme der Veränderlichen x, dann erleidet auch y eine Zunahme (oder Abnahme) dy, und diese Zunahme dy ist gleich dx mal dem D. Q. f'(x).

Wir werden also in diesem § die neue Schreibweise anwenden; werden also beispielsweise schreiben:

$$d\,(x^n) = n\,x^{n-1}\,dx$$

$$d\,(\sin x) = \cos x\,dx$$

$$d\,(\operatorname{tang} x) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx$$

$$d\,(e^x) = e^x \cdot dx$$

$$d\,[l\,(x)] = \frac{1}{x}\,dx$$

u. s. w.

1) $d[(a x^6 - b x^3 + c)^5] = 15\,(a x^6 - b x^3 + c)^4 (2 a x^3 - b)\,x^2\,dx$

2) $d[(2+x)\sqrt{2-x}] = \frac{2-3x}{2\sqrt{2-x}} \cdot dx$

3) $d[(2+3x^2)\sqrt{(1-x^2)^3} = \frac{x(1-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$

4) $d\left[\frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{(1-2x^2)^3}} \cdot dx$

5) $d(a^{+mx}+a^{-mx}) = m(a^{mx}-a^{-mx})l(a) \cdot dx$

6 $d\,l\left(\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) = \left(\frac{1}{x}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$

7) $d\,l\left(\sqrt{\frac{4-x^2}{4+x^2}}\right) = \frac{8x}{x^4-16}dx$

8) $dl(a+x+\sqrt{2ax+x^2}) = \frac{1}{\sqrt{2ax+x^2}} \cdot dx$

9) $d(\sin^3 x \cdot \cos x) = \sin^2 x \cdot (3-4\sin^2 x)\,dx$

10) $d\sin[l(x)] = \frac{\cos[l(x)]}{x}dx$

11) $d\,l\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sin x} \cdot dx$

12) $d\,l\left(\cot\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{\sin x} \cdot dx$

13) $d(x \cdot e^{\cos x}) = e^{\cos x}(1-x\sin x) \cdot dx$

14) $d\,\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a+x}} = \frac{a}{2(a+2x)\sqrt{x(a+x}} \cdot dx$

15) $d(2\cos^2(x+5)-\cos 2x) = [-4\cos(x+5)\sin(x+5)+2\sin 2x]\,dx$

16) $d\left[(x-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x)\operatorname{arctg} x\right] = \frac{x+x^2\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \cdot dx$

17) $d\left[\frac{1}{2}l\left(\frac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt{4+x}+2}\right)\right] = \frac{1}{x\sqrt{4+x}} \cdot dx$

§ 34. Aufgaben aus der Geometrie.

1) Wie lautet die Gleichung im Punkt $P_1(x_1 y_1)$ der Exponentialcurve $y = e^x$?

$$y - y_1 = e^{x_1}(x - x_1) \text{ oder}$$
$$y - y_1 = y_1 (x - x_1)$$

2) Ebenso für die Curve $y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$, die sogenannte Kettenlinie.

$$y - y_1 = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x_1}{m}} - e^{-\frac{x_1}{m}}\right)(x - x_1)$$

3) Ebenso für die Curven

a) $y = \sin x \qquad y - y_1 = \cos x_1 \cdot (x - x_1)$

b) $y = \cos x \qquad y - y_1 = -\sin x_1 \cdot (x - x_1)$

c) $y = \operatorname{tg} x \qquad y - y_1 = \frac{1}{\cos^2 x_1} \cdot (x - x_1)$

d) $y = \cot x \qquad y - y_1 = -\frac{1}{\sin^2 x_1} \cdot (x - x_1)$

4) Wie lauten die Tangentengleichungen der vorigen Aufgabe, wenn der Punkt P_1 die Abrisse $x_1 = \frac{\pi}{4}$ hat?

a. $y = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot x + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

b. $y = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot x + \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$

c. $y = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{\pi}{8}$

d. $y = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\pi}{8}$

5) Wie lautet die Tangentengleichung im Punkt mit $x_1 = \frac{\pi}{6}$ der Curve $y = \frac{x \cdot \sin x}{\pi}$

$$y = \frac{\pi\sqrt{3}+6}{12}\,x - \frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi\sqrt{3}+6}{12} + \frac{1}{12}$$

6) Wie lautet die Tangentengleichung der logarithmischen Curve $y = l(x)$ im Punkt P_1.

$$y - y_1 = \frac{1}{x_1}(x - x_1)$$

7) Wie lautet sie für $x_1 = e = 2{,}71828\ldots$

$$y = \frac{1}{e}\,x$$

8) Wie lautet in den Aufgaben 1—7 die Gleichung der zugehörigen Normalen?

9) Von folgenden Curven sollen die Gleichung der Tangente und Normale im Punkt $P_1\,(x_1\ y_1)$ bestimmt werden

a. $y = x^2 - 6x + 10$ für $x_1 = 1$

$$y = -4x + 9$$
$$y = \frac{1}{4}x + \frac{19}{4}$$

b. $y = \frac{1}{x^2}$ für $x_1 = 2$

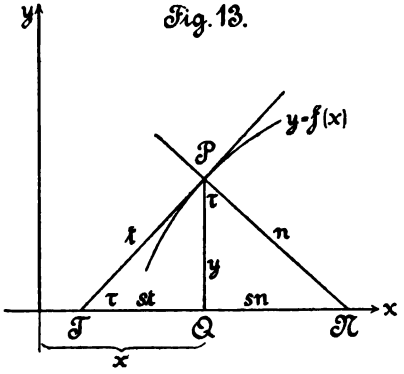
$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$
$$y = 4x - \frac{31}{4}$$

c. $y = \sqrt[3]{x^4}$ für $x_1 = 1$ $\quad y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$$

§ 35. Die 4 Tangentenstücke.

Fig. 13.



Zieht man im Punkt P einer Curve $y = f(x)$ Tangente und Normale, dann nennt man das Stück P T die „Länge der Tangente" oder kurz die „Tangente", das Stück P N die „Normale"; das Stück Q T heißt „Subtangente" (Projection der Tangente); das Stück Q N heißt „Subnormale" (Projektion der Normale). Wir wollen für diese vier „Tangentenstücke" folgende Bezeichnungen einführen:

Tangente	= P T	= t
Normale	= P N	= n
Subtang.	= Q T	= st
Subnorm.	= Q N	= sn

Wenn man für einen gegebenen Curvenpunkt P die Länge eines dieser vier Stücke kennt, kann man leicht die Tangente und Normale an die Curve im Punkt P construieren.

Um die Größen t, n, st, sn zu bestimmen, haben wir in der Fig. 13

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = f'(x) = y', \text{ und}$$

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{y}{st}; \text{ also } st = \frac{y}{\operatorname{tg}\tau} = \frac{y}{y'},$$

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{sn}{y}; \text{ also } sn = y \cdot \operatorname{tg}\tau = y \cdot y'$$

Ferner ist

$$t^2 = y^2 + st^2 = y^2 + \frac{y^2}{y'^2}; \text{ also}$$

$$t = y \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}}$$

$$n^2 = y^2 + sn^2 = y^2 + y^2 \cdot y'^2; \text{ also}$$

$$n = y\sqrt{1 + y'^2}$$

Wir finden also für die 4 Tangentenstücke folgende Werte:

$$sn = y \cdot y' \qquad n = y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}$$

$$st = y \cdot \frac{1}{y'} \qquad t = y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{y'}\right)^2}$$

Beispiel:

Für die Parabel $y^2 = 2px$ oder

$$y = \sqrt{2px} \text{ ist}$$

$$y' = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}$$

also: $sn = y \cdot y' = y \cdot \frac{p}{y} = p$

$$st = y \cdot \frac{1}{y'} = y \cdot \frac{y}{p} = \frac{y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$$

$$n = y \cdot \sqrt{1+\dot{y}^2} = y\sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}} = \sqrt{p^2+p^2}$$

$$t = y\sqrt{1+\left(\frac{1}{y'}\right)^2} = y\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}} = \frac{y}{p}\sqrt{p^2+y^2}$$

Übungsaufgaben:

1) Welche Tangentenconstructionen für die Parabel gehen aus den berechneten Werten für sn und st hervor?

2) Wie groß ist die Subtangente der Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. ? $\quad st = \frac{x^2 - a^2}{x}$

3) Wie groß ist die Subtangente der Hyperbel: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. ? $\quad st = \frac{x^2 - a^2}{x}$

4) Welche Tangentenconstruction folgt aus Aufgabe 2) und 3)?

5) Wie groß ist die Normale des Kreises
$x^2 + y^2 = r^2$?
$n = r$

6) Wie groß sind die 4 Tangentenstücke bei der Sinuslinie $y = \sin x$? $\quad sn = \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$

$$st = tg\ x$$
$$n = \sin x \sqrt{1+\cos^2 x}$$
$$t = tg\ x \sqrt{1+\cos^2 x}$$

7) Welche Tangentenconstruction folgt aus dem eben berechneten Wert für sn ?

8) Wie groß sind in 6) die Tangentenstücke für $x = \frac{\pi}{4}$?

$$sn = \frac{1}{2}$$
$$st = 1$$
$$n = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$t = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

9) Welches sind die 4 Tangentenstücke der Curve $y = e^x$?

$$st = 1$$
$$sn = e^{2x} = y^2$$
$$n = y\sqrt{1+y^2}$$
$$t = \sqrt{1+y^2}$$

10) Welche Tangentenconstruction ergiebt sich aus dem Wert $st = 1$?

11) Wie groß sind in 9) die 4 Tangentenstücke für $x = 1$?

$$st = 1$$
$$sn = e^2$$
$$t = \sqrt{1+e^2}$$
$$n = e\sqrt{1+e^2}$$?

12) Wie groß sind die 4 Tangentenstücke im Punkt $x = 2$ der Curve $y = \frac{1}{x}$?

$$sn = \frac{1}{8}$$
$$st = 2$$
$$n = \frac{1}{8}\sqrt{17}$$
$$t = \frac{1}{2}\sqrt{17}$$

13) Wie groß ſind dieſe Stücke im Punkt $x = 1$ der Curve $y = \frac{1}{x^2}$?

$$\begin{aligned} sn &= 2 \\ st &= \tfrac{1}{2} \\ n &= \sqrt{5} \\ t &= \tfrac{1}{2}\sqrt{5} \end{aligned}$$

14) Wie groß ſind dieſe Stücke im Punkt $x = 1$ der Curve $y = \sqrt[3]{x^4}$?

$$\begin{aligned} sn &= \tfrac{4}{3} \\ st &= \tfrac{3}{4} \\ n &= \tfrac{5}{3} \\ t &= \tfrac{5}{4}. \end{aligned}$$

§ 36. Weitere Aufgaben über Maxima und Minima.

1) Die Maxima und Minima der Funktion $y = \sin x$ ſind zu beſtimmen.

Hier iſt $y = \sin x$
$y' = \cos x$
$y'' = -\sin x$.

Der I. D. Q. $\cos x$ wird gleich 0 für

$$x = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \ldots\ldots \frac{(2n+1)\cdot\pi}{2}.$$

Nun wird aber $y'' = -\sin x$

poſitiv für $x = \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; \frac{11\pi}{2} \ldots\ldots$

negativ für $x = \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{9\pi}{2} \ldots\ldots$

Die Function hat also Maximapunkte für

$$x = \frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2};\ \frac{9\pi}{2} \ldots\ldots,$$ Minimapunkte für

$$x = \frac{3\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2};\ \frac{11\pi}{2} \ldots\ldots$$

2) Ebenso von der Function $y = \cos x$.

Max. für $x = 0;\ 2\pi;\ 4\pi;\ 6\pi \ldots\ldots$

Min. für $x = \pi;\ 3\pi;\ 5\pi;\ 7\pi \ldots\ldots$

3) Ebenso von der Function $y = \frac{x}{2} + \cos x$

Max. für $x = \frac{\pi}{6};\ \frac{13}{6}\pi;\ \frac{25}{6}\pi;\ \frac{37}{6}\pi \ldots\ldots$

Min. für $x = \frac{5}{6}\pi;\ \frac{17}{6}\pi;\ \frac{29}{6}\pi;\ \frac{41}{6}\pi \ldots\ldots$

4) Ebenso von der Function $y = \frac{x}{2} + \sin x$

Max. für $x = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi,\ \frac{14}{3}\pi \ldots$

Min. für $x = \frac{4}{3}\pi,\ \frac{10}{3}\pi,\ \frac{14}{3}\pi \ldots$

5). Man zeichne die Curven 3). und 4). um das Resultat geometrisch zu bestätigen.

6). Man zeichne die Curve $y = e^x + e^{-x}$ und bestimme ihre Maxima- und Minimapunkte.

Min. für $x = 0$.

7). Ebenso: $y = \frac{x^2}{e^x}$

Max. für $x = 2$

Min. für $x = 0$

8). Ebenso $y = \frac{x}{l(x)}$

Min. für $x = e$.

9). Ebenso $y = e^x \sin x$.

Max. für $x = \frac{3}{4}\pi; \frac{11}{4}\pi; \frac{19}{4}\pi \ldots$

Min. für $x = \frac{7}{4}\pi; \frac{15}{4}\pi; \frac{23}{4}\pi \ldots$

10). Ebenso $y = e^x \cdot \cos x$.

Max. für $x = \frac{\pi}{4} \quad \frac{9\pi}{4}; \frac{17}{4}\pi \ldots$

Min. für $x = \frac{5\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}; \frac{21}{4}\pi \ldots$

11). In einen Kreis vom festen Radius r soll ein gleichschenkliges Dreieck so eingeschrieben werden, daß sein Inhalt möglichst groß wird. Wie groß ist der Winkel an der Basis zu wählen? $x = 60^0$

12). In einem Dreieck kennt man eine Seite a und den gegenüberliegenden Winkel α. Wie groß ist der zweite Dreieckswinkel x zu nehmen, damit der Inhalt des Dreiecks möglichst groß wird?

$$x = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$$

13). Aus einem Baumstamm mit kreisförmigem Querschnitt mit dem Durchmesser d soll ein rechteckiger Balken so ausgeschnitten werden, daß seine Tragfähigkeit möglichst groß ist. Wie groß muß die Breite des Balkens sein?

$$x = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

14). Die beiden Seiten eines Dreiecks seien a und b. Wie groß muß man den eingeschlossenen Winkel x machen, damit der Inhalt ein Maximum wird?

$$x = \frac{\pi}{2} = 90^0$$

§ 37. Der erste und zweite D. Q. in der Mechanik.

Wir sahen im § 13, daß der D. Q. $\frac{ds}{dt}$ in der Mechanik die Bedeutung der Geschwindigkeit hat. Ist also: $s = f(t)$ eine Bewegungsgleichung, dann ist $v = f'(t)$, die Geschwindigkeit zur Zeit t.

Auch ein weiterer, wichtiger Begriff der Mechanik läßt sich durch die Sprache der Differentialrechnung einfach ausdrücken: Unter „Beschleunigung" versteht man das Verhältnis der Geschwindigkeitszunahme zur Zeitzunahme in einem äußerst kleinen Zeitintervall; man kann infolgedessen sagen: Die Beschleunigung ist die „Geschwindigkeit der Geschwindigkeit."

Ist also $v = f'(t)$, die Geschwindigkeit zur Zeit t, und nimmt v um die kleine Größe dv zu, während t um die kleine Zeitstrecke dt zunimmt; dann ist die Geschwindigkeitszunahme dividirt durch die Zeitzunahme gleich $\frac{dv}{dt}$ also gleich $\frac{df'(t)}{dt} = f''(t)$.

D. h. Ist $s = f(t)$ die Gleichung einer Bewegung, dann ist die Geschwindigkeit v gleich dem ersten, die Beschleunigung a gleich dem zweiten D. Q. nach t. Also:

$$v = f'(t)$$
$$a = f''(t)$$

Beispiel: Ein Körper bewege sich so, daß der Weg s (in cm ausgedrückt) immer gleich der dritten Potenz der Zeit (in Sec. ausgedrückt) plus 5 ist. Wie groß ist seine Geschwindigkeit und Beschleunigung zur Zeit t? Wie groß sind diese am Ende der 3ten und am Ende der 4ten Secunde? Welchen Weg

hat der Körper während der 4ten Secunde zurückgelegt?

Hier ist $s = t^3 + 5$

also $v = 3t^2$; $a = 6t$

am Ende der 3ten Sec. ist $s_3 = 3^3 + 5 = 32$ cm

$$v_3 = 3 \cdot 3^2 = 27 \ \frac{cm}{sec}$$

$$a_3 = 6 \cdot 3 = 18 \ \frac{cm}{sec^2}$$

am Ende der 4ten Sec. ist $s_4 = 4^3 + 5 = 69$ cm

$$v_4 = 3 \cdot 4^2 = 48 \ \frac{cm}{sec}$$

$$a_4 = 6 \cdot 4 = 24 \ \frac{cm}{sec^2}$$

Während der 4ten Secunde hat der Körper den Weg $s_4 - s_3 = 69 - 32 = 37$ cm zurückgelegt.

Übungsaufgaben:

1). Ein Körper bewegt sich nach der Gleichung $s = \frac{1}{2} g t^2$? Wie groß ist v und a?

$$v = g t$$
$$a = g.$$

2). Wie groß sind v und a für $s = c t \pm \frac{1}{2} g t^2$

$$v = c \pm g t$$
$$a = \pm g$$

3). Wann wird ein mit der Geschwindigkeit c senkrecht emporgeworfener Körper seinen höchsten Punkt erreichen?

$$\text{für } t = \frac{c}{g}$$

4). Ein Körper hat die Bewegungsgleichung $s = 1 - 3t^2 + t^3$ Welchen Weg legt er in der 5ten

Sec. zurück? Wie groß sind v und a am Ende der 5ten Secunde?

$$s_5 - s_4 = 34 \text{ Wegeinheiten}$$
$$v_5 = 45$$
$$a_5 = 24$$

5). Wie groß sind v und a nach der 8ten Secunde, wenn die Bewegungsgleichung lautet $s = 4 \sin \frac{t\pi}{2}$?

$$v_8 = 2\pi$$
$$a_8 = 0$$

6). Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit eines Pendels, dessen Bewegungsgleichung ist:

$$\varphi = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)?$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi_0 \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)$$

7). Ein Körper hat die Bewegungsgleichung

$$s = e^{-t}.$$

Wie groß ist Geschwindigkeit und Beschleunigung am Ende der t ten Secunde?

$$v = -\frac{1}{e^t}$$

$$a = \frac{1}{e^t}$$

§ 38. Reihenentwicklung.

I. Eine algebraische Summe, bei der die Anzahl der Glieder ins Unbegrenzte wächst, heißt eine „unendliche Reihe".

Beispiele:

I. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots\ldots$

II. $1 + 6 + 11 + 16 + 21 + \ldots\ldots$

III. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + - \ldots\ldots$
IV. $ax + a^2x^2 + a^3x^3 + a^4x^4 + \ldots\ldots\ldots$

Von den obigen Reihen sind die beiden ersten arithmetische, die dritte und vierte geometrische Reihen. Der Wert der dritten und vierten Reihe ist nach der bekannten Formel $s = \frac{a}{1-q}$ leicht zu bestimmen, und zwar wird

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} + \ldots\ldots = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{3}$$

$$ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \ldots\ldots = \frac{ax}{1-ax}$$

Die Reihen I und II dagegen haben keinen endlichen Wert, sondern ihre Summe wird mit wachsender Gliederzahl unendlich groß. Solche unendliche Reihen, die keinen endlichen Wert haben, heißen „divergente Reihen". Sie sind zur Ausführung von Berechnungen meistens nicht brauchbar. Weit wichtiger sind diejenigen unendlichen Reihen, die einen bestimmten endlichen Wert haben, wie die Reihen III, und IV. Sie heißen „convergente Reihen".

II. Seien a_0, a_1, a_2, a_3, ... beliebige constante Größen, x eine Veränderliche, dann heißt die Reihe

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots\ldots\ldots$

eine „nach Potenzen von x fortschreitende Reihe" oder kurz eine „Potenzreihe."

Wir sind nun im Stande, durch die Hülfsmittel der Differentialrechnung eine Function f(x) in eine solche Potenzreihe zu verwandeln.

Sei f(x) die zu entwickelnde Function vom x, dann setzen wir

1). $f(a + x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots + Nx^n + \ldots$ wobei die Größen A, B, C, D, E, ... N, ... u. s. w. erst zu

bestimmen sind. Dies soll im Nachfolgenden geschehen:

Legen wir der veränderlichen Größe x zunächst den Wert 0 bei, dann erhalten wir aus Gleichung 1).

$f(a) = A$; damit ist die Größe A bestimmt

$$A = f(a),$$

wobei $f(a)$ denjenigen Wert bedeutet, den man erhält, wenn man in der Function $f(x)$ an Stelle vom x den Wert a einsetzt. Um die weiteren Größen zu bestimmen, differenziren wir die Gleichung 1). nach x und finden dann:

2) $f'(a + x) = B + 2\,C\,x + 3\,D\,x^2 + 4\,E\,x^3 + \cdots + n\,N\,x^{n-1} + \cdots\cdots$

Setzt man nun wieder $x = 0$; dann wird $f'(a) = B$; damit ist auch B bestimmt

$$B = f'(a),$$ wobei

$f'(a)$ denjenigen Wert bedeutet, den man erhält, wenn man in $f'(x)$ für x den Wert a einsetzt. Um die weiteren Größen zu bestimmen, differenzieren wir wieder die Gleichung 2) und finden:

3) $f''(a + x) = 2\,C + 2 \cdot 3 \cdot D\,x + 3 \cdot 4 \cdot E\,x^2 + \cdots\cdots + (n-1)\,n\,N\,x^{n-2} \cdots\cdots$

Für $x = 0$ findet man wieder:

$f''(a) = 2 \cdot C$ also $C = \frac{f''(a)}{2}$

Durch nochmaliges Differenzieren findet man:

4) $f'''(a + x) = 2 \cdot 3 \cdot D + 2 \cdot 3 \cdot 4\,E\,x + \cdots + (n-2)\,(n-1)\,n\,N\,x^{n-3} + \cdots\cdots$

und für $x = 0$

$f'''(a) = 2 \cdot 3 \cdot D$ also $D = \frac{f'''(a}{2 \cdot 3 \cdot}$

In dieſer Weiſe kann man fortfahren und alle weiteren Größen beſtimmen, es wird:

$$f^{IV}(a+x) = 2 \cdot 3 \cdot 4\,E + \ldots + (n-3) \cdot (n-2)(n-1)\,n\,N\,x^{n-4} + \ldots$$

und für $x = 0$

$$f^{IV}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot E \qquad \text{alſo } E = \frac{f^{IV}(a)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

Nach n maliger Differentiation findet man

$$f^{(n)}(a+x) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (n-3)(n-2) \cdot (n-1)\,n \cdot N + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

und für $x = 0$

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (n-3)(n-2) \cdot n \cdot N$$

$$\text{Daher } N = \frac{f^{(n)}(a)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots\ldots n}$$

Das Product $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots\ldots n$ bezeichnet man gewöhnlich mit n! (geleſen n = Facultät)

Für die unbekannten Größen haben wir nun folgende Werte gefunden:

$$A = f(a)$$

$$B = f'(a) \qquad = \frac{f'(a)}{1!}$$

$$C = \frac{f''(a)}{2} \qquad = \frac{f''(a)}{2!}$$

$$D = \frac{f'''(a)}{2 \cdot 3} \qquad = \frac{f'''(a)}{3!}$$

$$E = \frac{f^{IV}(a)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \qquad = \frac{f^{IV}(a)}{4!}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$N = \frac{f^{(n)}(a)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung 1) ein, dann erhält man:

$$f(a+x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}x+\frac{f''(a)}{2!}x^2+\frac{f'''(a)}{3!}x^3+\cdots\cdots$$

Diese Reihe heißt die „Taylor'sche Reihe." Sie ist natürlich nur dann brauchbar, wenn sie konvergirt, d. h. einen endlichen Summenwert erhält. Für die von uns betrachteten Functionen ist dies der Fall; doch würde der Beweis hierfür den Rahmen dieses Buches überschreiten.

Setzt man in der Taylorschen Reihe für a den Wert 0, dann erhält man

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots\cdots$$

Diese Reihe heißt „Reihe von Mac-Laurin" und ist häufig brauchbarer und bequemer als die Taylor'sche.

Um Irrtümer zu verhüten, wollen wir noch einmal bemerken, daß

$$f(0);\ f'0);\ f''(0);\ f'''(0);\ \text{u. s. w.}$$

diejenigen Werte bedeuten, die man erhält, wenn man in

$$f(x);\ f'(x);\ f''(x);\ f'''(x);\ \cdots\cdots\ \text{u. s. w.}$$

für x den Wert Null einsetzt.

§ 39. Anwendungen.

Diese beiden Reihen von Taylor und Mac-Laurin können nun dazu dienen, um irgend eine Function f (x) in eine Potenzreihe zu verwandeln.

I. Betrachten wir zunächst die Function $\frac{1}{1-x}$.

Hier ist

$f(x) = \frac{1}{1-x}$; also $f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$; also $f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1-x)^3}$; „ $f''(0) = 1 \cdot 2 = 2!$

$f'''(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1-x)^4}$; „ $f'''(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$

$f^{IV}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(1-x)^5}$; also $f^{IV}(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$f^{(n)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots n}{(1-x)^{n+1}}$; also $f^{(n)}(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n = n!$

Setzen wir nun in der Mac-Laurin'schen Formel

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4 + \ldots.$$

die für $f(0)$; $f'(0)$; $f''(0)$; $f'''(0)$ u. s. w. gefundenen Werte ein, so finden wir

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \ldots..$$

Diese Reihenentwicklung besitzt nur Gültigkeit für solche Werte von x, welche zwischen -1 und $+1$ liegen.

II. Es sei die Function $+\sqrt{1+x}$ zu entwickeln.

Hier ist

$f(x) = +\sqrt{1+x}$; also $f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$; „ $f'(0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}$; „ $f''(0) = -\frac{1}{4}$

$f'''(x) = +\frac{3}{8\sqrt{(1+x)^5}}$; also $f'''(0) = \frac{3}{8} = \frac{1 \cdot 3}{8}$

$f^{IV}(x) = -\frac{15}{16\sqrt{(1+x)^7}}$; „ $f^{IV}(0) = -\frac{15}{16} = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{16}$

Also wird:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4 \cdot 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 3!}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{16 \cdot 4!}x^4 + - \ldots\ldots$$

Auch diese Formel ist nur für solche Werte von x brauchbar, welche kleiner sind als 1. Sie kann zur bequemen Berechnung von Quadratwurzeln dienen. Hierbei erhält man schon genügende Genauigkeit, wenn man nur 3 oder 4 Glieder berücksichtigt.

Man berechne auf diese Weise die folgenden Wurzeln und vergleiche das Resultat mit dem in der Tabelle:

1) $\sqrt{1{,}25} = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = ?$
2) $\sqrt{1{,}1} = \sqrt{1+\frac{1}{10}} = ?$
3) $\sqrt{1{,}2} = \sqrt{1+\frac{1}{5}} = ?$
4) $\sqrt{1{,}3333} = \sqrt{1+\frac{1}{3}} = ?$
5) $\sqrt{1{,}5} = \sqrt{1+\frac{1}{2}} = ?$
6) $\sqrt{26} = \sqrt{25+1} = 5\sqrt{1+\frac{1}{25}} = ?$
7) $\sqrt{27} = \sqrt{25+2} = 5\sqrt{1+\frac{2}{25}} = ?$
8) $\sqrt{103} = \sqrt{100+3} = 10\sqrt{1+\frac{3}{100}} = ?$
9) $\sqrt{55} = \sqrt{49+6} = 7\sqrt{1+\frac{6}{49}} = ?$
10) $\sqrt{67} = \sqrt{64+3} = 8\sqrt{1+\frac{3}{64}} = ?$

III. Es soll die Function $(a+x)^n$ nach Potenzen von x entwickelt werden (Binom. Satz).

Hier ist:

$f(x) = (a+x)^n$; also $f(0) = a^n$

$f'(x) = n\,(a+x)^{n-1}$; also $f'(o) = n \cdot a^{n-1}$

$f''(x) = n(n-1)(a+x)^{n-2}$; also $f''(o) = n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2}$

$f'''(x) = n\,(n-1)\,(n-2)\,(a+x)^{n-3}$;

also $f'''(o) = n \cdot (n-1)\,(n-2)\,a^{n-3}$

Also wird

$$f(x) = (a+x)^n = a^n + n \cdot a^{n-1}x + n\,\frac{(n-1)}{2!}\,a^{n-2}x^2 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}\,a^{n-3}x^3 + \ldots\ldots$$

Entwickle nach dieser Formel folgende Ausdrücke:

1) $(a+x)^3$
2) $(a+x)^5$
3) $(a+x)^8$
4) $(a+x)^{10}$
5) $(a+x)^{11}$
6) $\sqrt[3]{a+x} = (a+x)^{\frac{1}{3}}$
7) $\sqrt[4]{a+x} = (a+x)^{\frac{1}{4}}$
8) $\sqrt[5]{a+x} = (a+x)^{\frac{1}{5}}$
9) $\frac{1}{a-x} = (a-x)^{-1}$
10) $\frac{1}{(a-x)^2} = (a-x)^{-2}$
11) $\frac{1}{(a-x)^5} = (a-x)^{-5}$

12) $\frac{1}{(a-x)^{11}} = (a-x)^{-11}$

13) $\frac{1}{\sqrt[3]{a+x}} = (a+x)^{-\frac{1}{3}}$

14) $\frac{1}{\sqrt[4]{a+x}} = (a+x)^{-\frac{1}{4}}$

§ 40. Fortsetzung.

Wir wollen nun einige weitere wichtige Functionen nach dem Mac-Laurinschen Satze entwickeln:

I. Für $f(x) = \sin x$ finden wir

$f(0) = 0$
$f^{I}(0) = 1$
$f^{II}(0) = 0$
$f^{III}(0) = -1$
$f^{IV}(0) = 0$
$f^{V}(0) = 1$
$f^{VI}(0) = 0$
$f^{VII}(0) = -1$
⋮ ⋮

alle weiteren D. Q. bilden periodisch die Werte
$0; 1; 0; -1 \ldots\ldots$

Setzt man diese Werte in die Mac-Laurin'sche Formel ein, dann findet man

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots\ldots$$

Diese Formel kann dazu dienen, den zu einem gegebenen Bogen x gehörigen Sinus so genau wie gewünscht zu bestimmen.

II. Für cos x findet man:

$f(0) = 1$

$f'(0) = 0$

$f''(0) = -1$

$f'''(0) = 0$

von da ab wiederholen sich die D. Q. periodisch; also wird:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \ldots\ldots$$

III. Für e^x werden

$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \ldots\ldots = 1$

also erhalten wir für e^x die Reihenentwicklung

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots$$

IV. Für a^x wird

$f(0) = 1$

$f'(0) = l(a)$

$f''(0) = l^2(a)$

$f'''(0) = l^3(a)$

⋮ ⋮

Also

$$a^x = 1 + \frac{x \cdot l(a)}{1!} + \frac{x^2 l^2(a)}{2!} + \frac{x^3 l^3(a)}{3!} + \ldots\ldots$$

V. Die Function l (x) läßt sich nach dem Mac-Laurin'schen Satz nicht entwickeln, weil $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) \ldots\ldots = \infty$ unendlich werden. Deshalb betrachten wir die Function $l(1 + x)$.

Hier finden wir:

$f(x) = l(1 + x)$ also $f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1 + x}$ also $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ alſo $f''(0) = -1 = -1!$

$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ alſo $f'''(0) = +2 = +2!$

$f^{IV}(x) = \frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4}$ alſo $f^{IV}(0) = -2\cdot 3 = -3!$

$f^{V}(x) = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5}$ alſo $f^{V}(0) = 2\cdot 3\cdot 4 = +4!$

$f^{VI} = -\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(1+x)^5}$ alſo $f^{VI}(0) = -2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = -5!$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Alſo wird hier

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + - \cdots\cdots$$